La settupla come strumento di controllo e documentazione di un modello di sistema dinamico

Questo testo è distribuito con Licenza Creative Commons Attribuzione
Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale

Luca Mari, versione 5.4.16
lmari@liuc.it
http://research.liuc.it/luca.mari
Università Cattaneo – LIUC

[documento liberamente scaricabile dal sito http://research.liuc.it/luca.mari/tds]

Contesto

Una volta che la componente qualitativa di un modello è stata costruita, per esempio mediante uno o più diagrammi causali, è possibile passare a progettare la componente quantitativa, in cui per ogni variabile identificata occorre specificare la regola analitica con cui il valore della variabile è calcolato nel corso della simulazione.
La Teoria Generale dei Sistemi formalizza gli aspetti strutturali dei modelli – cioè quelli che contribuiscono a determinare la dinamica del sistema modellizzato – mediante una successione di sette elementi, chiamata perciò in breve "la settupla". Essa ha la duplice finalità di costituire uno strumento di documentazione del modello e di fornire delle condizioni per il controllo della consistenza del modello stesso: la costruzione di una settupla corretta è perciò condizione necessaria, benché evidentemente non sufficiente, di correttezza del modello.

Premessa

Un modello matematico di un sistema dinamico è costituito da un insieme di variabili connesse da relazioni di dipendenza funzionale. Se per esempio a e b sono due tali variabili e $b = f(a)$, allora b è variabile in quanto a lo è. La variabilità di a può essere dovuta a cause diverse (dipendenza da un'altra variabile, assegnazione di un valore casuale, assegnazione di un valore attraverso l'input dell'utente o la lettura di un elemento di un insieme di dati in qualche modo disponibili), ma in ogni caso si manifesta nel tempo: dunque $a = a(t)$, e perciò $b(t) = f(a(t))$. In questo senso ogni variabile del modello può essere anche intesa come una funzione di argomento t.

La settupla

La settupla è:

$$\langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \Omega, \mathrm{Y}, \mathrm{X}, \varphi, \eta \rangle$$

e i suoi elementi sono definiti come segue.

L'*insieme dei tempi* T in cui si intende analizzare / simulare la dinamica del sistema: T può essere un intervallo reale, $\mathrm{T}=[t_0, t_1]$, nell'ipotesi di tempo continuo, oppure una successione $\mathrm{T}=\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, nell'ipotesi di tempo discreto; in questo secondo caso, se, come è spesso ragionevole, gli istanti t_i sono equidistanti, $t_{i+1}=t_i+\Delta t$, con Δt costante, l'insieme dei tempi è completamente definito dall'istante iniziale dell'analisi, t_0, dall'istante finale, t_n, e dall'intervallo Δt. Spesso i modelli di sistemi fisici sono caratterizzati da un insieme T continuo, che viene discretizzato nel momento in cui il modello è oggetto di simulazione numerica.
Nell'ipotesi usuale di tempo-stazionarietà si può assumere t_0=0. L'istante finale t_n potrebbe non essere noto a priori e non essere rilevante per le specifiche, e in tal caso può non essere indicato.

L'*insieme degli input* U che il sistema ammette. Sulla struttura algebrica di questo insieme non vengono fatte a priori ipotesi, e quindi, in particolare, può essere continuo o discreto, e può essere un insieme numerico o meno. Nel caso più semplice, il sistema ha una sola funzione u scalare di input, e in tal caso U è il suo codominio, cioè u:T→U.

In generale, il sistema può avere n funzioni scalari di input, $u_1,...,u_n$, ognuna con un suo codominio $U_1,...,U_n$. In tal caso l'insieme degli input U è il prodotto cartesiano $U_1 \times ... \times U_n$, ed è solo convenzionale la scelta di esprimere gli input appunto come n funzioni scalari oppure come una singola funzione vettoriale.

Se per esempio il sistema ha due funzioni scalari, u_1 e u_2, allora $U = U_1 \times U_2$, e perciò u_1:T→U_1 e u_2:T→U_2, oppure in modo equivalente $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2)$ e $\boldsymbol{u}$:T→U.

U può essere l'insieme vuoto, U=∅, e in tal caso il sistema è detto chiuso o autonomo.

La specifica dell'insieme U definisce dunque un vincolo che si applica istante per istante, e quindi in modo sincronico, sugli input del sistema.

L'*insieme delle funzioni di input ammissibili* $\Omega \subseteq \{u\text{: T} \rightarrow \text{U}\}$, dove ogni funzione u dell'insieme Ω in ogni istante $t \in$T descrive un input ammissibile al sistema. Nel caso l'insieme dei tempi T sia continuo, una tipica condizione che potrebbe essere specificata mediante Ω è che la funzione di input deve essere essa stessa continua. Nel caso l'insieme dei tempi T sia discreto, una tipica condizione che potrebbe essere specificata mediante Ω è che la somma dei valori della funzione di input abbia un valore massimo. Attraverso l'insieme Ω potrebbe essere poi specificato che gli input sono valori casuali, ottenuti per campionamento da distribuzioni (continue o discrete) di probabilità date.

Ovviamente, se U=∅ allora anche Ω=∅.

La specifica dell'insieme Ω definisce dunque un vincolo che si applica sull'intero dominio, e quindi in modo diacronico, degli input del sistema.

L'*insieme degli output* Y = $\{y_i\}$ che si sceglie di osservare. Sulla struttura algebrica di questo insieme non vengono fatte a priori ipotesi, e quindi, in particolare, può essere continuo o discreto. Come per gli input, il sistema può avere n funzioni scalari di output, ognuna con un suo insieme di variabilità $Y_1,...,Y_n$, e in tal caso $Y = Y_1 \times ... \times Y_n$. Poiché si suppone che ogni sistema sia modellizzato per osservarne il comportamento attraverso la variazione nel tempo di una o più variabili, vale sempre che Y≠∅.

L'*insieme degli stati* X = $\{x_i\}$ del sistema, che include in particolare lo stato iniziale $x(t_0)$. Sulla struttura algebrica di questo insieme non vengono fatte a priori ipotesi, e quindi, in particolare, può essere continuo o discreto. Come per gli input e gli output, il sistema può avere n variabili scalari di stato, ognuna con un suo insieme di variabilità $X_1,...,X_n$, e in tal caso $X = X_1 \times ... \times X_n$.

X può essere l'insieme vuoto, X=∅, e in tal caso il sistema è detto combinatorio e non ha, propriamente, una dinamica.

La *funzione di transizione di stato locale* (o *di stato prossimo*) φ:U×X→X, che descrive l'evoluzione dello stato del sistema in funzione dell'input e dello stato stesso. Nel caso in cui lo stato sia costituito da n variabili scalari, per ognuna di esse deve essere definita una componente scalare della funzione vettoriale φ. Questa funzione è diacronica: nel caso di tempo discreto $x(t + \Delta t)=\varphi(u(t), x(t))$, mentre nel caso di tempo continuo $dx(t)/dt=\varphi(u(t), x(t))$.

Nel caso di sistemi autonomi, φ:X→X. Nel caso di sistemi combinatori, questa funzione non è definita.

La *funzione di comportamento* η:U×X→Y, che descrive la dipendenza istantanea dell'output del sistema dall'input e dallo stato. Nel caso in cui l'output sia costituito da n variabili scalari, per ognuna di esse deve essere definita una componente scalare della funzione vettoriale η. Questa funzione è sincronica: $y(t)=\eta(u(t), x(t))$, essendo dunque y: T → Y la funzione di output del modello.

Nel caso di sistemi autonomi, η:X→Y. Nel caso di sistemi combinatori, η:U→Y. Ne segue che un sistema autonomo combinatorio non può avere output variabili nel tempo, ed è dunque statico.

Nel caso il sistema in esame sia modellizzato come costituito da più sottosistemi, si assume generalmente che il primo elemento della settupla (l'insieme dei tempi) sia lo stesso per tutti i sottosistemi, cosa che corrisponde a un'ipotesi di sincronismo tra sottosistemi. Gli altri sei elementi della settupla sono invece specifici ai singoli sottosistemi.

In sintesi:

		con stati?	
		no	sì
con input?	no	statico	sequenziale autonomo
	sì	combinatorio	sequenziale aperto

Come si vede, la settupla non include variabili algebriche (cioè non di stato) interne (cioè non di input né di output) al sistema. La ragione è che esse non contribuiscono né alla descrizione strutturale né a quella dinamica del sistema stesso, e vengono invece introdotte allo scopo di semplificare la definizione delle variabili di stato o di output. Per ragioni analoghe, la settupla non include costanti (per esempio nella forma di parametri, condizioni al contorno, condizioni iniziali, …).
Sulle relazioni tra input, stati e output sono poste le condizioni seguenti.

- Gli input sono variabili esogene, che descrivono gli effetti dell'ambiente (incluso l'osservatore) sul sistema. Ne segue che una variabile di input non può essere di stato.
- Gli stati sono variabili interne al sistema, che ne descrivono la dinamica. Ne segue che una variabile di stato non può essere di input.
- Gli output possono essere input, o stati, o ancora variabili diverse da input e stati: in pratica, ogni variabile può essere definita come di output.

La classe di sistemi modellizzabili mediante la settupla è ampia, ma non del tutto generale: per esempio, la funzione di transizione di stato locale potrebbe essere generalizzata ammettendo contributi stocastici.

La settupla e STGraph

STGraph è stato progettato in modo da consentire di un'implementazione diretta della settupla in un modello eseguibile in una simulazione numerica.
In STGraph:

- l'insieme dei tempi T è discreto, specificato dalle variabili di sistema tempo iniziale della simulazione, `time0`, intervallo di tempo Δt, `timeD`, e tempo finale, `time1`;
- l'insieme degli input U è il prodotto cartesiano degli insiemi di variabilità delle variabili di input, associate ai nodi algebrici senza frecce entranti e non costanti;
- l'insieme delle funzioni di input al sistema Ω è specificato implicitamente dalle espressioni che definiscono le variabili di input;
- l'insieme degli output Y è il prodotto cartesiano degli insiemi di variabilità delle variabili di output, associate ai nodi, algebrici o di stato, dichiarati di output.
- l'insieme degli stati X è il prodotto cartesiano degli insiemi di variabilità delle variabili di stato;
- la funzione di transizione di stato locale φ:U×X→X è specificata dalle espressioni che definiscono la dinamica delle variabili di stato;
- la funzione di comportamento η:U×X→Y è specificata dalle espressioni che definiscono le variabili di output.