

## Costruire modelli di sistemi dinamici



Questo testo è distribuito con Licenza Creative Commons Attribuzione  
Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale

Luca Mari, versione 2.4.16  
lmari@liuc.it  
<http://research.liuc.it/luca.mari>  
Università Cattaneo – LIUC

[documento liberamente scaricabile dal sito <http://research.liuc.it/luca.mari/tds>]

### Contenuti

1. A partire da un esempio.....	1
2. Rappresentazioni mediante grafi.....	4
3. Gli aspetti quantitativi nella definizione dei modelli.....	5
4. Tipi di nodi e logica di simulazione.....	6
5. Alcune linee guida nella costruzione e l'uso di modelli.....	8
6. Sistemi di cui la dinamica locale è nota a priori.....	9
6.1. Algoritmi di integrazione.....	13
7. La formalizzazione del comportamento di un sistema.....	14
7.1. Modelli sequenziali.....	16
8. La sintesi: la settupla.....	17
9. Strumenti per la progettazione: design pattern.....	20
10. Analisi numerica dei sistemi lineari del primo e del secondo ordine.....	21
10.1. Sistemi del primo ordine.....	22
10.2. Sistemi del secondo ordine.....	23
11. Quando <i>non</i> usare questa (meta-)modellistica.....	24

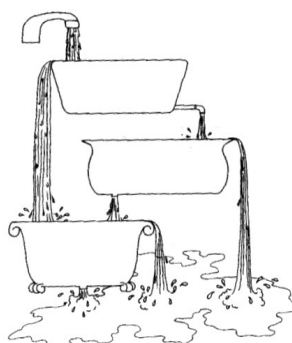
### 1. A partire da un esempio

Riassumiamo i temi generali che abbiamo introdotto finora:

- per *prendere una decisione* a proposito di un oggetto, può essere utile *effettuare una previsione* su di esso;
- per effettuare una previsione su un oggetto, può essere utile *creare un modello* di tale oggetto, che lo interpreti come un sistema dinamico, cioè ne descriva l'evoluzione nel corso del tempo.

La Teoria dei Sistemi può essere perciò intesa come un insieme di strumenti e tecniche formali finalizzate alla produzione di modelli di sistemi dinamici.

Allo scopo di esplorare questa dimensione operativa, sviluppiamo passo per passo il modello di un sistema che non sia troppo semplice (ma naturalmente nemmeno troppo complesso, se non altro per evitare di dover assumere troppe precompetenze da parte del lettore). Ecco una raffigurazione “pittorica” del sistema:



*Una raffigurazione del sistema di cui vogliamo creare un modello  
(figura da: G. M. Weinberg, D. Weinberg, General principles of systems design, Dorset, 1988).*

Il *problema di previsione* di cui intendiamo occuparci è il seguente: quanta acqua, versata dalle vasche, si raccoglie in ogni istante, o cumulativamente in un dato arco di tempo, sul pavimento?

La figura che rappresenta il sistema è già un modello del sistema reale (vasche, tubi, acqua, ...): mette in evidenza infatti alcuni aspetti del sistema stesso e nello stesso tempo ne tralascia altri, per esempio il materiale di cui le vasche sono fatte, o il loro colore, o il loro peso, e perfino la loro dimensione reale. Come abbiamo già considerato in precedenza, nella scelta di un modello è dunque inevitabile stabilire dei confini per il sistema, e ciò è necessario:

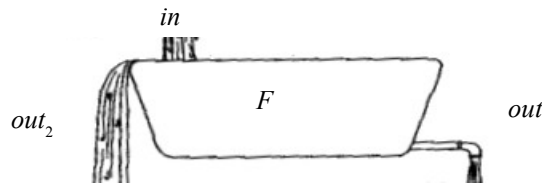
- *in ampiezza*, per identificare ciò che viene escluso dal sistema perché sufficientemente “lontano” da esso; in questo caso, per esempio, possiamo ragionevolmente assumere che la sorgente da cui l’acqua giunge al sistema sia esterna al sistema stesso, e quindi appunto “al di là” del suo confine, con ciò scegliendo di non trattare i problemi dovuti al funzionamento di tale sorgente;
- *in profondità*, per identificare ciò che viene escluso dal sistema perché eccessivamente specifico; in questo caso, per esempio, possiamo ragionevolmente assumere di poter prescindere nella modellizzazione da caratteristiche quali la temperatura dell’ambiente e dell’acqua, eventuali non omogeneità dell’acqua stessa, ..., che rimangono appunto “al di là” del confine del sistema.

Dovrebbe essere chiaro perché è rilevante identificare in modo appropriato, e quindi comunicare chiaramente, ciò che si intende modellizzare e ciò che invece si sceglie di tralasciare: il modello di un sistema non è in sé né vero né falso; può certamente essere “sbagliato”, se è internamente inconsistente (per esempio se cerca di formalizzare condizioni contraddittorie), ma la sua qualità dipende criticamente dagli obiettivi per i quali esso viene costruito, e quindi il principale criterio su cui deve essere valutato è la sua *adeguatezza*.

Tornando al modello descritto nella figura precedente, è chiaro che un modello di questo genere non è certo uno strumento particolarmente adeguato per la soluzione del nostro problema di previsione. A partire da questo, cerchiamo perciò di costruire un secondo modello, più adatto a un trattamento formale.

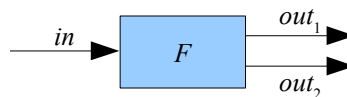
Come abbiamo già notato, caratteristica imprescindibile di ogni sistema è di essere individuato rispetto al suo ambiente. Concretamente ciò pone il problema: cosa considerare parte del sistema e cosa dell’ambiente? O altrimenti: dove porre il confine del sistema?

Al di là di dettagli che possiamo ragionevolmente considerare ininfluenti per il nostro problema di previsione, riconosciamo che il sistema è costituito di tre sottosistemi, ognuno dei quali raffigurabile in questo modo:



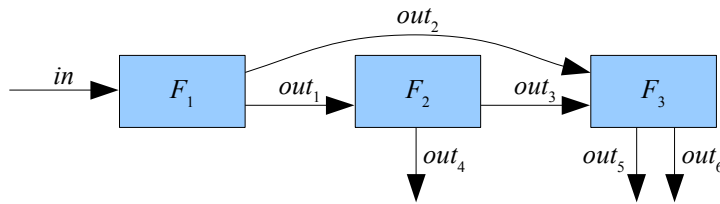
*Una raffigurazione di ognuno dei tre sottosistemi di cui il sistema in esame è costituito.*

e quindi tutti caratterizzati da una stessa struttura:



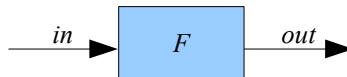
*La struttura funzionale dei sottosistemi identificati.*

In conseguenza, il sistema complessivo risulta così schematizzabile:



La struttura funzionale del sistema complessivo, ottenuta dalla combinazione dei tre sottosistemi.

che, astruendo dalla struttura interna del sistema, diventa:



La struttura funzionale equivalente del sistema complessivo.

con  $out = out_4 + out_5 + out_6$  e avendo indicato con  $F$  la trasformazione complessivamente compiuta dai tre sottosistemi, e dunque dalla combinazione di  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ .

- ✓ Si verifichi la correttezza di queste schematizzazioni, identificando le corrispondenze tra la raffigurazione “pittorica” del sistema e la rappresentazione della sua struttura funzionale.

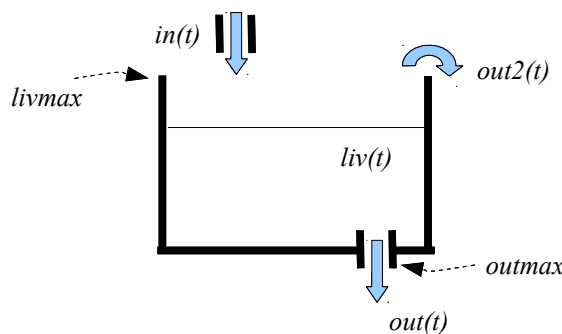
La ricostruzione della dinamica del sistema si basa dunque sulla previsione dell’andamento nel tempo dei flussi attraverso ogni singolo sottosistema-vasca, che a questo scopo deve essere quindi accuratamente modellizzato. Il primo passo consiste *nell’identificazione delle grandezze, variabili e costanti, rilevanti* alla previsione per ogni sottosistema. A questo scopo, un passo preliminare di una qualche utilità può essere quello di produrre una descrizione, in italiano ma già sufficientemente precisa, della propria interpretazione sulla dinamica del (sotto)sistema in esame.

- ✓ Si studi la struttura dei sottosistemi in esame e si cerchi di scrivere una descrizione della loro dinamica.

Una descrizione al proposito potrebbe essere, per esempio: in ogni istante, una vasca riceve in input una certa quantità di acqua, e produce in output una certa quantità d’acqua; la vasca ha una capacità massima: se la quantità di acqua contenuta è minore di tale capacità massima, l’output dipende solo dalla quantità di acqua che transita dal tubo di scarico, e tale quantità dipende dalla portata massima del tubo; se invece la quantità di acqua contenuta supera la capacità nella vasca, l’output si ottiene sommando la portata massima del tubo con la quantità di acqua eccedente la capacità della vasca.

- ✓ Si studi la struttura dei sottosistemi in esame e si cerchi di identificare quali variabili e quali costanti sono necessarie per descrivere la dinamica di tali sottosistemi.

Ecco una nuova schematizzazione di un generico sottosistema, con in evidenza le grandezze rilevanti per la descrizione della sua dinamica:



Le variabili e le costanti necessarie per descrivere la dinamica di un sottosistema vasca.

avendo dunque indicato, in particolare, con *livmax* il livello massimo di acqua che la vasca può contenere senza fuoriuscite e con *outmax* la portata massima del tubo di scarico.

## 2. Rappresentazioni mediante grafi

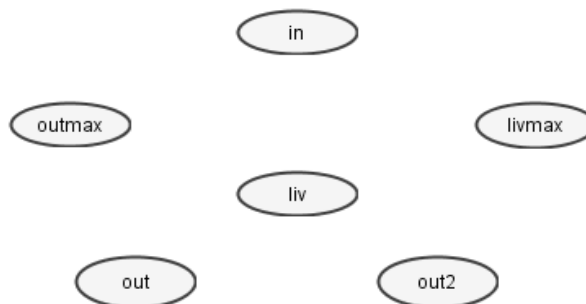
Questo schema è già piuttosto analitico, ma in esso le condizioni che descrivono la dinamica del sistema rimangono ancora implicite. Il passo successivo nella direzione di una formalizzazione adatta alla simulazione consiste di *mettere in evidenza le relazioni di dipendenza tra le grandezze* (variabili e costanti) identificate. Adottiamo al proposito una rappresentazione basata su grafi orientati, con la convenzione che ogni nodo corrisponda a una grandezza e ogni arco orientato (che chiameremo più semplicemente “freccia”) dal nodo *A* al nodo *B* esprima il fatto che la grandezza *B* dipende nella sua definizione, e quindi in ogni istante nel suo valore, dalla grandezza *A*. E così, il caso banale in cui  $A=1$  e  $B=A+1$  verrebbe descritto mediante il seguente grafo:



*Un semplice grafo che descrive la relazione di dipendenza tra due grandezze.*

dato che appunto *B* è definito mediante *A*.

Chiameremo una rappresentazione di questo genere *grafo delle dipendenze funzionali* (o anche, più brevemente, “grafo delle dipendenze”). Nel caso del nostro problema, abbiamo visto che il comportamento di ogni sottosistema è caratterizzato dalle alcune grandezze, sei per la precisione, per ognuna delle quali definiamo dunque un nodo:

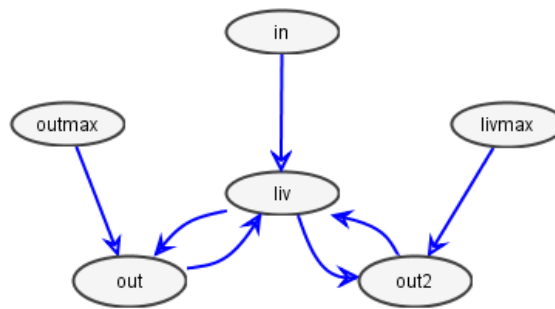


*I nodi del grafo che descrive il sottosistema vasca.*

Il grafo deve allora essere completato con frecce che descrivano le relazioni di dipendenza tra le grandezze. Si noti che questa è un'attività ancora *qualitativa*, nel senso che non coinvolge ancora numeri e formule. Si tratta nondimeno di un passaggio assai utile, se il sistema da modellizzare non è particolarmente semplice, perché intermedio verso la definizione completa del modello, che includerà anche una parte quantitativa, ovviamente necessaria per eseguire una simulazione.

- ✓ Si riparta dalla descrizione della dinamica del sottosistema in esame e si cerchi di completare il grafo precedente con le frecce necessarie.

Ecco come potrebbe essere completato il grafo:



Il grafo che descrive il sottosistema vasca.

Per verificare la correttezza di questo modello, analizziamo per esempio le relazioni che coinvolgono il nodo *out*, e quindi la variabile che descrive la quantità di acqua che in ogni unità di tempo defluisce dalla vasca attraverso il suo tubo di scarico. Il valore di tale variabile è evidentemente compreso nell'intervallo  $[0, outmax]$  e dunque dipende appunto dalla grandezza *outmax*: ciò giustifica la freccia da *outmax* a *out*. Il valore attuale dipende poi dalla quantità di acqua effettiva nella vasca: ciò giustifica la freccia da *liv* a *out*. D'altra parte, in ogni unità di tempo la quantità di acqua presente nella vasca dipende anche da quanta acqua fuoriesce dalla vasca stessa attraverso il tubo di scarico, e quindi dal valore di *out*: ciò giustifica la freccia da *out* a *liv*.

Vedremo in breve che un cambiamento può essere ancora opportuno anche sulla componente qualitativa di questo modello, ma supponiamo per ora che esso sia corretto, e cominciamo quindi a introdurne gli aspetti quantitativi, e quindi a raffinarlo ulteriormente.

### 3. Gli aspetti quantitativi nella definizione dei modelli

L'operazione da compiere a questo punto consiste nell'*esplicitare le equazioni* che definiscono il valore che in ogni istante viene assunto da ognuna delle grandezze identificate. Ripartendo dall'analisi appena compiuta, possiamo ipotizzare che *outmax* sia una costante, mentre a proposito di *out* formalizzando le considerazioni precedenti otteniamo:

$$out(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } liv(t) = 0 \\ liv(t) & \text{se } liv(t) \leq outmax \\ outmax & \text{altrimenti} \end{cases}$$

✓ Si verifichi la correttezza della definizione data per la variabile  $out(t)$ , e si riformuli poi la definizione nella forma  $out(t) = \dots$ , in modo dunque da evitare la struttura condizionale.

Conclusioni analoghe si applicano per la costante *livmax* e la variabile *out2*, anch'essa definibile in forma condizionale in questo modo:

$$out2(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } liv(t) \leq outmax \\ liv(t) - outmax & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ma anche, più sinteticamente:

$$out2(t) = \text{if}(liv(t) \leq outmax, 0, liv(t) - outmax)$$

avendo introdotto la funzione a tre argomenti  $\text{if}(cond, v1, v2)$  il cui valore è *v1* se la condizione *cond* è vera, e *v2* altrimenti. Si può poi notare che in questo caso la variabile *out2* è definibile in modo equivalente anche come:

$$out2(t) = \max(0, liv(t) - outmax)$$

o ancora più semplicemente come:

$$out2(t) = \text{pos}(liv(t) - outmax)$$

nell'ipotesi che sia definita una funzione  $\text{pos}()$  tale che:

$$\text{pos}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A proposito di *in*, possiamo alternativamente scegliere che sia una costante oppure, più in generale, una funzione del tempo,  $in(t)$ : nel primo caso, *in* è un parametro del sistema; nel secondo caso, è invece una grandezza che caratterizza un input al sistema.

Rimane a questo punto da definire la variabile *liv*, che abbiamo lasciato per ultima perché ha una

caratteristica che la rende qualitativamente diversa sia da *out* sia da *out2*: la quantità di acqua che al tempo  $t$  è presente nella vasca,  $liv(t)$ , dipende non solo da quanta acqua è entrata e da quanta esce, ma anche dalla quantità di acqua che si trovava nella vasca all'istante precedente. Assumendo un modello di simulazione a tempo discreto, con un intervallo di ricalcolo  $\Delta t > 0$ , l'equazione che definisce la variabile  $liv$  è dunque:

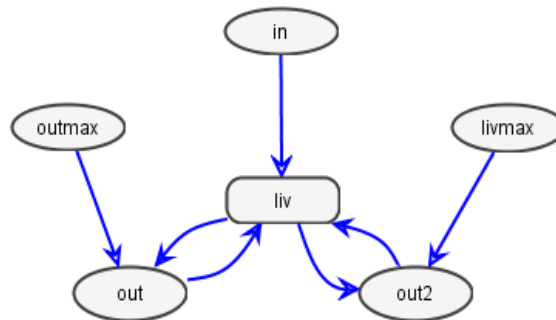
$$liv(t + \Delta t) = liv(t) + in(t) - (out(t) + out2(t))$$

Ciò mette in evidenza la differenza tra  $liv$  e, per esempio,  $out$ :

- $out(t)$  dipende da valori calcolati nello stesso istante di tempo  $t$  (in questo caso da  $liv(t)$ ), e quindi è calcolabile in modo *sincronico* con le variabili da cui dipende;
- $liv(t)$  dipende invece da valori calcolati nell'istante di tempo precedente,  $t - \Delta t$ , e quindi deve essere calcolata in modo *diacronico* rispetto alle variabili da cui dipende.

Detto altrimenti, una variabile come  $out$  *mantiene la memoria* del suo valore, e quindi può essere propriamente chiamata *variabile di stato* del sistema, distinguendola così dalle variabili "a ricalcolo sincronico", che chiameremo *variabili* (o, come caso particolare, costanti) *algebriche*.

La rilevanza di questa distinzione è tale da suggerire di adottare nel grafo delle dipendenze una forma particolare per i nodi di stato, così che nel caso in esame il grafo diventa:



*Il grafo che descrive il sottosistema vasca, con  $liv$  definito come nodo di stato.*

#### 4. Tipi di nodi e logica di simulazione

Nella costruzione del grafo delle dipendenze abbiamo dunque introdotto due *tipi di nodi*:

- nodi algebrici
- nodi di stato

Ognuno di questi tipi è caratterizzato da alcune *regole di consistenza*.

I nodi algebrici:

- possono avere sia frecce entranti che frecce uscenti:
- possono quindi essere concatenati:
- dato che un nodo non può essere definito, in modo diretto o indiretto, sincronicamente in termini di se stesso, non possono invece essere messi in loop: **vietato!**

I nodi di stato:

- come i nodi algebrici possono avere sia frecce entranti che frecce uscenti e possono essere concatenati;
- a differenza dei nodi algebrici, possono essere messi in loop, con altri nodi di stato: , ma anche con uno o più nodi algebrici: .

Quest'ultimo punto è rilevante, e quindi può essere utile discuterlo con maggior dettaglio, per esempio considerando nuovamente la relazione di dipendenza reciproca tra  $out$  e  $liv$ .  $out$  dipende da  $liv$  in modo sincrono, nel senso che  $out(t) = f(liv(t))$ , per una certa funzione  $f$ . D'altra parte, abbiamo già visto che la dipendenza di  $liv$  da  $out$  è asincrona, dato che è ritardata nel tempo,  $liv(t + \Delta t) = f(out(t))$ : il valore di  $liv$  dipende da quello di  $out$  all'istante precedente. E' proprio questo che rende possibile la dipendenza reciproca tra le due variabili.

A prescindere dal tipo di nodo, vale poi la regola che i grafi delle dipendenze non contengono mai auto-loop, cioè frecce che partono e arrivano sullo stesso nodo, dato che:

- nel caso di nodi algebrici, che sono calcolati istantaneamente e quindi non possono essere definiti in

termini di se stessi, gli auto-loop non sono ammessi;

- nel caso dei nodi di stato, che possono essere sempre definiti a partire dal loro proprio valore assunto all'istante precedente, gli auto-loop sono impliciti.

Per quanto riguarda gli aspetti quantitativi:

- un nodo algebrico è definito da una sola espressione:

$nodo\text{-}expr \leftarrow \dots$

- un nodo di stato richiede la specificazione del valore del suo stato iniziale:

$nodo\text{-}init \leftarrow \dots$

e dell'espressione con cui il valore del nodo viene ricalcolato (che, come vedremo, si chiama "funzione di transizione di stato locale"):

$nodo\text{-}trans \leftarrow \dots$

Nella scrittura di queste espressioni, per semplicità spesso tralascieremo l'indicazione esplicita del tempo (è tra l'altro ciò che generalmente si fa nei sistemi di simulazione, nei quali il tempo è sempre presente e gestito come variabile indipendente), e quindi scriveremo per esempio:

$$liv(t+\Delta t) = liv(t) + in(t) - (out(t) + out2(t))$$

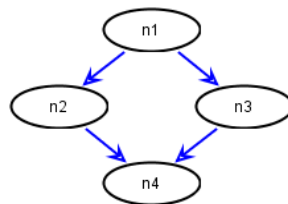
anche nella forma:

$$liv\text{-}trans \leftarrow liv + in - (out + out2)$$

Per indicare il valore del nodo stesso all'istante precedente useremo poi la variabile *this* (riprendendola dal costruito con cui nel linguaggio Java si indica l'oggetto corrente), così che la precedente espressione diventa, più correttamente:

$$liv\text{-}trans \leftarrow this + in - (out + out2)$$

Si dovrebbe notare infine che, in conseguenza di questa formalizzazione, i grafi delle dipendenze implicano una struttura di *calcolo parallelo*. Per chiarire questo punto, si consideri il seguente semplice grafo:



*Un semplice esempio di grafo a calcolo parallelo.*

Le frecce del grafo definiscono un *ordine di valutazione* per i nodi: *n4* può essere valutato solo dopo che sono stati valutati *n2* e *n3*, e questi dopo che è stato valutato *n1*. D'altra parte, nessun vincolo è posto sull'ordine di valutazione di *n2* e *n3*, che dunque potrebbero essere valutati appunto in parallelo (il fatto che il grafo sia eventualmente valutato da sistema software in esecuzione su un calcolatore standard, che non è in grado di svolgere calcolo parallelo, non è rilevante rispetto al dato concettuale circa la possibilità di valutazione parallela).

Il fatto che sull'insieme dei nodi sia definito un ordine di valutazione (la cui definizione è tra l'altro più complessa di quanto abbiamo appena discusso, a causa della possibile presenza di loop nel caso in cui il grafo includa nodi di stato) non modifica la logica generale della simulazione, che è basata sull'ipotesi che il tempo sia una variabile indipendente del sistema, comune a tutti i nodi del grafo, cioè calcolata sincronicamente per tutte le variabili.

I sistemi software di simulazione adottano spesso la logica di modellistica e calcolo a tempo (discreto e) sincrono. Ciò è consistente con l'ipotesi della fisica classica, espressa in modo esplicito in particolare a partire da Galileo e Newton, secondo cui esiste un tempo assoluto, condiviso da tutti i sistemi fisici. Operativamente, questa ipotesi corrisponde all'assunzione che orologi perfettamente funzionanti che siano stati sincronizzati rimarranno sincronizzati indipendentemente dal loro stato di moto. È solo con la meccanica einsteiniana, nell'ambito della teoria della relatività speciale, che questa ipotesi è stata riconosciuta come un'approssimazione di una legge più generale, che considera il tempo una grandezza relativa ai sistemi. Tale approssimazione si mantiene comunque valida per sistemi in moto a velocità sufficientemente minori della velocità della luce.

La simulazione è dunque caratterizzata da *una base dei tempi*, specificata da:

- l'istante iniziale della simulazione,  $t_{iniz}$  ;
- l'istante finale della simulazione,  $t_{fin}$  ;

- il passo (“step”) della simulazione,  $\Delta t$ , così che nell’esempio del grafo:



in cui  $A=t$  e  $B=A+1$  i risultati della simulazione possono essere descritti nella seguente tabella:

tempo	$A$	$B$
$t_{iniz}$	$t_{iniz}$	$t_{iniz} + 1$
$t_{iniz} + \Delta t$	$t_{iniz} + \Delta t$	$t_{iniz} + \Delta t + 1$
$t_{iniz} + 2 \Delta t$	$t_{iniz} + 2 \Delta t$	$t_{iniz} + 2 \Delta t + 1$
...	...	...
$t_{fin}$	$t_{fin}$	$t_{fin} + 1$

## 5. Alcune linee guida nella costruzione e l’uso di modelli

Benché la modellistica sia un’attività che richiede da parte di colui che la svolge esperienza, sensibilità, intuizione, ... alcune indicazioni metodologiche di massima possono essere comunque fornite al proposito, da interpretare come *linee guida*, suggerimenti generali rivolti soprattutto a chi non ha ancora sviluppato una propria esperienza, sensibilità, intuizione, ... nella costruzione e nell’uso di modelli. Per chiarezza, presentiamo tali linee guida in forma schematica.

Sistema	E’ il punto di partenza dell’attività di modellistica, nel senso che un modello è sempre un modello di qualcosa; d’altra parte, ogni cosa che diciamo, scriviamo, disegniamo, ... del sistema ne è già un’interpretazione, e quindi è già in effetti parte di un suo modello.
Costruzione di uno o più modelli informali	<p>Proprio perché un’interpretazione è inevitabile, la prima fase dell’attività di modellistica consiste nel costruire uno o più modelli informali, cioè descritti in italiano oppure rappresentati mediante un disegno, dei diagrammi, ... Nonostante i modelli informali siano generalmente ancora incompleti e possano contenere ambiguità, questa fase è fondamentale perché fornisce gli elementi su cui potrà essere successivamente sviluppata la formalizzazione. In particolare, nella costruzione di un modello informale è già necessario chiarire:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• le <i>finalità</i> per cui il modello viene costruito e quindi in riferimento alle quali la sua adeguatezza potrà essere valutata; al proposito una distinzione importante è tra modelli con finalità solo di previsione o anche di decisione, per esempio per rendere “giocabile” il modello: in questo secondo caso, occorre chiarire: <ul style="list-style-type: none"> <li>• su quali variabili (“di input”) è possibile intervenire;</li> <li>• se è specificata, e in tal caso qual è, la funzione obiettivo a cui il decisore / giocatore dovrebbe tendere e come calcolare in ogni istante la distanza tra il comportamento del sistema e l’obiettivo indicato;</li> </ul> </li> <li>• la <i>scala di tempo</i> per cui si intende considerare il comportamento del sistema grazie al modello: uno stesso sistema analizzato nella scala dei secondi, o dei giorni, o degli anni assai plausibilmente dovrà essere modellato in modi diversi;</li> <li>• i <i>confini</i> intesi per il sistema modellato, sia in ampiezza (cosa si considera parte dell’ambiente invece che del sistema perché non abbastanza “vicino” al sistema stesso) sia in profondità (cosa si sceglie di tralasciare del sistema perché considerato eccessivamente specifico e di dettaglio);</li> <li>• il <i>livello di granularità</i> adottato per il modello, chiarendo se si intende sviluppare un unico modello, interpretando quindi il sistema come un tutt’uno, oppure più modelli, uno per ogni sottosistema identificato; in questo secondo caso, occorre specificare in termini almeno generali le caratteristiche di ogni sottosistema e le</li> </ul>



	<p>relazioni di dipendenza previste tra i sottosistemi, per esempio mediante uno o più diagrammi che illustrino le relazioni tra i vari sottosistemi.</p> <p>Nel loro complesso, le finalità del modello e i confini intesi per il sistema costituiscono le cosiddette <i>ipotesi modellistiche</i>, che è dunque necessario specificare prima di operare per creare una versione formale del modello costruito.</p>
Costruzione di un modello formale	<p>La seconda fase dell'attività di modellistica consiste nel descrivere la conoscenza disponibile sul sistema, e considerata rilevante in riferimento alle ipotesi modellistiche assunte, mediante un linguaggio formale, che renda controllabili nel modo più possibile oggettivo la completezza e la non ambiguità del modello costruito. In particolare, nella costruzione di un modello formale è necessario chiarire:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• le <i>grandezze</i> (variabili e costanti) che caratterizzano la dinamica del sistema; ognuna di esse corrisponde a un nodo del grafo delle dipendenze;</li> <li>• le <i>relazioni di dipendenza</i> tra grandezze; ogni relazione tra una coppia di grandezze corrisponde a una freccia del grafo;</li> <li>• per ogni grandezza, l'<i>equazione</i> che ne descrive la dinamica locale;</li> <li>• la <i>base dei tempi</i> che verrà impiegata nella simulazione.</li> </ul>
Simulazione	<p>Un modello formale può essere simulato, generalmente con il supporto di un opportuno strumento software, al fine di giungere per via numerica a una <i>previsione sulla dinamica del sistema</i>, corrispondente a una ricostruzione, appunto numerica, della dinamica globale del sistema stesso. I risultati della simulazione costituiscono anche uno strumento per la <i>validazione del modello</i>: se si dispone di un'ipotesi a proposito di quella che dovrebbe essere la dinamica del sistema, il confronto tra questa ipotesi e i dati ottenuti nel corso della simulazione può portare a concludere che sia necessario raffinare il modello costruito, tornando così a una fase precedente del lavoro di modellistica e ripartendo con i nuovi dati disponibili. Per questa stessa ragione è spesso appropriato svolgere sui modelli implementati un'attività di <i>analisi di sensitività</i>: si fanno variare in modo controllato uno o più parametri (o eventualmente grandezze di input) e si studia il conseguente comportamento del sistema, per esempio per accertare se piccole variazioni degli input producono variazioni proporzionalmente piccole degli output, oppure se il modello si comporta in modo fortemente non lineare, e in tal caso se questo corrisponde a un comportamento considerato corretto o è l'indicazione di un errore nella costruzione del modello stesso.</p>

## 6. Sistemi di cui la dinamica locale è nota a priori

Nel caso in cui del sistema in considerazione siano già note le equazioni che descrivono la dinamica locale, la procedura precedente non è evidentemente necessaria. La simulazione rimane comunque uno strumento utile, che consente lo studio della dinamica globale del sistema secondo modalità complementari a quelle tradizionali, basate sulla ricerca analitica della soluzione in forma chiusa delle equazioni stesse.

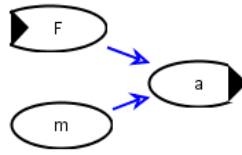
A proposito della possibilità di trovare soluzioni in forma chiusa di equazioni, è interessante il seguente schema, tratto da [L.von Bertalanffy, Teoria generale dei sistemi, trad.it. 1983].

equazione	equazioni					
	lineari			non lineari		
	una	diverse	molte	una	diverse	molte
algebraica	facilissima	facile	essenzialmente impossibile	molto difficile	molto difficile	impossibile
differenziale ordinaria	facile	difficile	essenzialmente impossibile	molto difficile	impossibile	impossibile
differenziale alle derivate parziali	difficile	essenzialmente impossibile	impossibile	impossibile	impossibile	impossibile

Ne emerge con chiarezza la limitata applicabilità delle tecniche puramente analitiche, e quindi, in modo

complementare, l'utilità di tecniche alternative, e della simulazione in particolare.

Un esempio, sufficientemente semplice e ben noto, è costituito dal già citato secondo principio della dinamica,  $F(t)=ma(t)$ , che riscritto come  $a(t)=F(t)/m$  mostra come l'output  $a(t)$  dipenda dall'input  $F(t)$  oltre che dalla costante  $m$ .



Il grafo corrispondente all'equazione  $a(t)=F(t)/m$ .

Nell'ipotesi che la variabile di output sia non l'accelerazione  $a$  a cui il sistema viene sottoposto a causa della forza applicata, ma la posizione che esso assume nel corso del tempo, abbiamo già notato come l'equazione precedente diventi:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$$

cioè come un'equazione differenziale del secondo ordine, in cui la variabile di interesse, la posizione  $p(t)$ , compare proprio come funzione incognita. In tal caso, l'input  $F(t)$  agisce non direttamente sull'output  $p(t)$ , ma sulla variazione della sua variazione, con la conseguenza che l'equazione non è più algebrica ma, appunto, differenziale (l'equazione contiene solo derivate totali, e non parziali della funzione da integrare, e quindi è chiamata *equazione differenziale ordinaria*, in inglese "ordinary differential equation", ODE). Di questa equazione sono note dalla fisica elementare le soluzioni in alcuni casi particolarmente semplici, e specificamente per il moto rettilineo uniforme, nel caso  $F(t)=0$ , e per il moto uniformemente accelerato, nel caso  $F(t) \neq 0$  e costante, ma la soluzione generale dipende, evidentemente, dalla funzione di input  $F(t)$  e, in particolare, dalla sua integrabilità.

Tale requisito non è necessario se invece si intende ricostruire la dinamica globale del sistema per via numerica, dunque mediante la simulazione. Per rendere simulabile il comportamento di sistemi descritti in questo modo, occorre operare come segue.

Ricordando che la velocità  $v(t)$  è la derivata prima della posizione e l'accelerazione è la derivata prima della velocità, possiamo trasformare la precedente equazione differenziale del secondo ordine in un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = \frac{F(t)}{m} \end{cases}$$

Questa trasformazione è applicabile in condizioni sufficientemente generali: un ODE di ordine  $n$  può essere trasformata in un sistema di  $n$  ODE di ordine 1 attraverso l'introduzione di  $n-1$  variabili "intermedie".

Il punto importante qui è che le due equazioni hanno la stessa forma:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_{i,k}(u(t), \mathbf{x}(t))$$

avendo indicato con  $u$  l'input, con  $\mathbf{x}$  il vettore di stato del sistema, e con  $k$  gli eventuali parametri da cui la dinamica del sistema dipende. Infatti ponendo  $x_1(t)=p(t)$  e  $x_2(t)=v(t)$ , oltre che  $u(t)=F(t)$  e  $k=1/m$ , il precedente sistema diventa:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = k u(t) \end{cases}$$

Un sistema di equazioni differenziali del primo ordine di questo genere, in cui le funzioni da integrare sono le variabili di stato del sistema modellizzato, si chiama *rappresentazione canonica a tempo continuo* del sistema.

La tecnica tradizionale per la soluzione di questo sistema si basa appunto sull'integrazione di tali equazioni:

se ne ottiene un sistema di equazioni integrali, ognuna delle quali è funzione dell'estremo superiore di integrazione, cioè del limite destro dell'intervallo temporale che corrisponde al periodo di osservazione del comportamento del sistema:

$$\begin{cases} p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \\ v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{F(\tau)}{m} d\tau \end{cases}$$

Mentre dunque le equazioni:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_{i,k}(u(t), \mathbf{x}(t))$$

formalizzano la dinamica locale del sistema, la loro versione integrale:

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^t f_{i,k}(u(\tau), \mathbf{x}(\tau)) d\tau$$

ne rappresenta la dinamica globale.

Ricorrendo invece alla simulazione, non è necessario cercare una soluzione analitica al sistema di equazioni differenziali del prim'ordine, e si opera invece "per discretizzazione". Ognuna di esse viene riscritta trasformando la derivata della funzione  $x_i(t)$  nel corrispondente rapporto incrementale:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \approx \frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$$

(dove naturalmente l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è  $\Delta t$  e quanto più è lineare la funzione  $x_i$  nel punto  $t$ ) e dunque:

$$x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + f_{i,k}(u(t), \mathbf{x}(t)) \Delta t$$

un'espressione della forma:

$$x_i(t+\Delta t) = \varphi_{i,k}(u(t), \mathbf{x}(t), \Delta t)$$

che rappresenta dunque l'equazione di ricalcolo di un nodo di stato, in cui la funzione  $\varphi_{i,k}$  è chiamata *funzione di stato prossimo*, o anche *funzione di transizione di stato locale*, per la variabile  $x_i$ , componente  $i$ -esima del vettore di stato  $\mathbf{x}$ . Dunque, in riferimento alla notazione introdotta in precedenza:

$$\varphi(x) = x\text{-trans}$$

Nel nostro caso, dato lo stato iniziale  $p(t_0)$  e  $v(t_0)$ , la soluzione locale e discreta è:

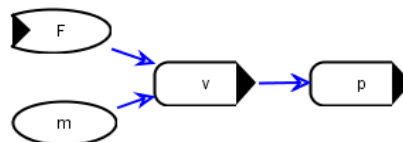
$$\begin{cases} p(t+\Delta t) = p(t) + v(t) \Delta t \\ v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{F(t)}{m} \Delta t \end{cases}$$

da implementare dunque nelle espressioni per il ricalcolo dei nodi di stato in questo modo:

$$\varphi(p) \leftarrow \text{this} + v * \Delta t$$

$$\varphi(v) \leftarrow \text{this} + (F/m) * \Delta t$$

Ne segue, in particolare, che il grafo delle dipendenze per questo sistema sarà:



*Il grafo che formalizza il sistema dinamico in esame.*

In linea di principio potrebbe essere adottata una tecnica di soluzione alternativa, basata direttamente sulla discretizzazione dell'equazione del secondo ordine:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$$

realizzata a partire dalla considerazione che la derivata seconda è la derivata della derivata:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dp(t)}{dt} \right)$$

così che:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} \approx \frac{d}{dt} \left( \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} \right) = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{dp(t+\Delta t)}{dt} - \frac{dp(t)}{dt} \right)$$

e quindi, discretizzando a loro volta le due derivate:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} \approx \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{p(t+2\Delta t) - p(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} \right) = \frac{p(t+2\Delta t) - 2p(t+\Delta t) + p(t)}{(\Delta t)^2}$$

La necessità di calcolare il termine  $p(t+2\Delta t)$ , e quindi di effettuare una previsione relativa a  $2\Delta t$  dal tempo presente (e se l'ODE fosse di ordine  $n$  la previsione sarebbe per  $n\Delta t$ ), costituisce una ragione della difficoltà di adottare questa tecnica.

Il sistema ammette poi una rappresentazione matriciale, nella forma:

$$\varphi(x) \leftarrow \mathbf{this} + (A \times \mathbf{this} + Bu) * \Delta t$$

avendo indicato con **this** il vettore colonna  $[p(t) \ v(t)]^T$ .

In questo caso, dunque:

$$\varphi \left( \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} \right) \leftarrow \mathbf{this} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{this} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F/m * \Delta t$$

Per giungere a un modello completo occorre specificare la dimensionalità del sistema: ipotizzando, per esempio, che la dinamica sia descritta sul piano verticale ( $x, y$ ), ognuna delle grandezze (plausibilmente salvo la massa, che è considerata adimensionale...) dovrà essere duplicata, introducendo quindi le variabili  $p_x, p_y, \dots$

- ✓ Si sviluppi un modello simulabile per il sistema bidimensionale descritto, nell'ipotesi che l'input sia la forza gravitazionale (e quindi sia  $F_y = -k$ , per un certo  $k$  assegnato). Si simuli quindi il moto balistico di un proiettile, distinguendo la dinamica del sistema a seguito dell'impatto con il terreno come segue:
  - il proiettile prosegue a coordinate  $y$  negative (dunque "perfora il terreno")
  - il proiettile prosegue nel moto lungo  $x$  con  $y=0$
  - il proiettile si ferma
  - il proiettile rimbalza in modo elastico
  - il proiettile rimbalza in modo anelastico

Si noti che ogni volta che la dinamica locale di un sistema è descritta dalla sua rappresentazione canonica si ottengono per la funzione di stato prossimo espressioni del tipo:

$$\varphi(x) \leftarrow \mathbf{this} + y * \Delta t$$

che, come abbiamo visto, per iterazione conducono alla versione discreta dell'equazione integrale soluzione dell'equazione differenziale di partenza. E' per questo che, per brevità, definiamo:

$$\mathit{integral}(y) \triangleq \mathbf{this} + y * \Delta t$$

così che l'espressione precedente diventa:

$$\varphi(x) \leftarrow \mathit{integral}(y)$$

Per come l'abbiamo ottenuta, dovrebbe essere chiaro che non ogni funzione di transizione di stato locale ha questa forma. Il più semplice esempio di modello che include una variabile di stato la cui dinamica non è basata su (o, più propriamente: non è efficacemente descritta in termini di) questa logica di tipo cumulativo è *la linea di ritardo*, cioè un sistema che in ogni istante fornisce in output l'input che aveva ricevuto nell'istante precedente.



*Il grafo che formalizza una linea di ritardo.*

Si può facilmente mostrare che il comportamento richiesto si ottiene semplicemente da:

$$\varphi(out) \leftarrow in$$

- ✓ Si implementi questo modello, per verificarne il comportamento, e lo si utilizzi quindi per creare un derivatore, cioè un sistema che fornisce in output la derivata (naturalmente calcolata in forma numerica, come rapporto incrementale) dell'input.

## 6.1. Algoritmi di integrazione

La definizione appena introdotta:

$$integral(y) \triangleq this + y * \Delta t$$

ammette un'interpretazione assai espressiva e comunque semplice da comprendere. A partire da una dinamica a tempo continuo, l'espressione:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(u(t), x(t)) \Delta t$$

corrisponde a un'approssimazione ottenuta mediante sviluppo in serie di Taylor della funzione:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(u(t), x(t))$$

arrestato al primo ordine, dunque in condizioni di linearità. Ricordando infatti che in generale:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \frac{df(t)}{dt} \Delta t + \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots + \frac{d^i f(t)}{dt^i} \frac{\Delta t^i}{i!} + \dots$$

si vede immediatamente appunto che arrestando lo sviluppo al primo ordine si ottiene:

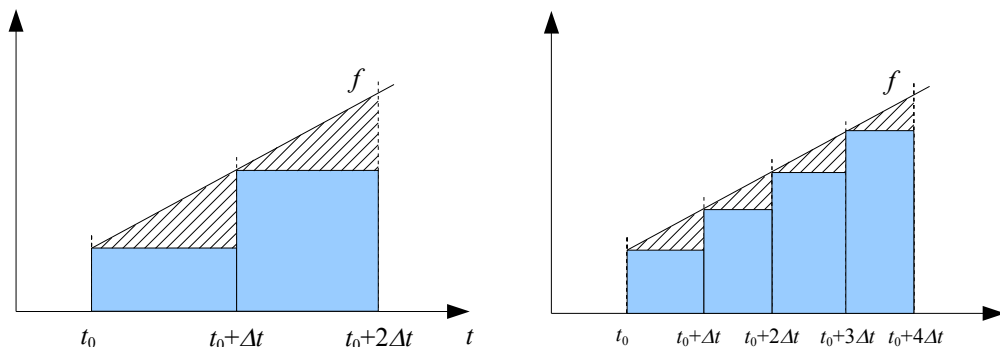
$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt} \Delta t = x(t) + f(u(t), x(t)) \Delta t$$

Ciò suggerisce due strategie generali per intervenire, in modo complementare, sulla qualità dell'approssimazione:

- ridurre il passo  $\Delta t$ , allo scopo di “rendere meno discreto” il processo di calcolo;
- calcolare  $x(t + \Delta t)$  mediante uno sviluppo in serie di Taylor che includa anche termini di ordine superiore al primo.

Mentre la prima strategia non pone problemi se non di capacità computazionale, dato che ridurre di un ordine di grandezza  $\Delta t$  corrisponde evidentemente ad aumentare di un ordine di grandezza il numero di iterazioni necessarie per il calcolo, la seconda strategia non è facilmente attuabile, poiché anche solo la derivata seconda della funzione  $x(t)$  non è, in generale, nota.

Si può allora intervenire alternativamente modificando l'*algoritmo di integrazione*. Notiamo al proposito che il calcolo implicato da  $x(t + \Delta t) = x(t) + f(u(t), x(t)) \Delta t$  assume che la funzione da integrare  $f$  rimanga costante nell'intervallo di integrazione  $\Delta t$ , così che l'integrazione è realizzata sommando l'area di rettangoli, secondo la più semplice versione dell'algoritmo di integrazione, chiamata *di Eulero*.



*Un esempio della logica di integrazione secondo l'algoritmo di Eulero: le aree tratteggiate rappresentano la differenza tra l'integrale della funzione e il valore calcolato mediante l'algoritmo di Eulero. Nella figura di destra è stato dimezzato il passo di integrazione, migliorando con ciò il risultato.*

Alternativi all'algoritmo di Eulero, e generalmente più accurati di questo a parità di passo di integrazione, sono gli algoritmi di integrazione di *Runge-Kutta*, che calcolano  $x(t + \Delta t)$  mediante una media pesata di più valori di  $f$  opportunamente scelti nell'intervallo di integrazione. Nel caso dell'algoritmo di Runge-Kutta del secondo ordine (RK2), per esempio:

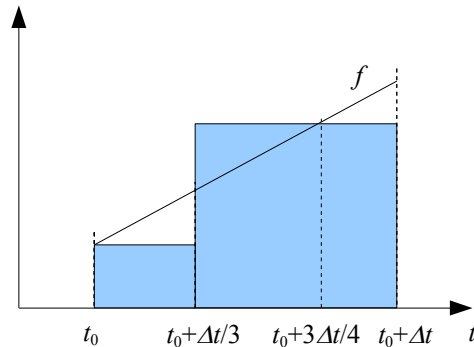
$$x(t+\Delta t) = x(t) + \left(\frac{1}{3}K_1 + \frac{2}{3}K_2\right)\Delta t$$

dove:

$K_1 = f(u(t), x(t))$  (dunque la funzione  $f$  è calcolata nel punto  $(u(t), x(t))$ )

e:

$K_2 = f(u_1(t), x_1(t))$  (dunque la funzione  $f$  è calcolata nel punto  $(u_1(t), x_1(t))$ ), essendo tale punto ottenuto calcolando secondo l'algoritmo di Eulero ma solo fino a  $3/4$  dell'intervallo di integrazione:  $x_1(t) = x(t) + f(u(t), x(t))\frac{3}{4}\Delta t$ .



L'esempio di un passo di integrazione secondo l'algoritmo RK2.

#### Algoritmi di integrazione: Eulero vs. RK2

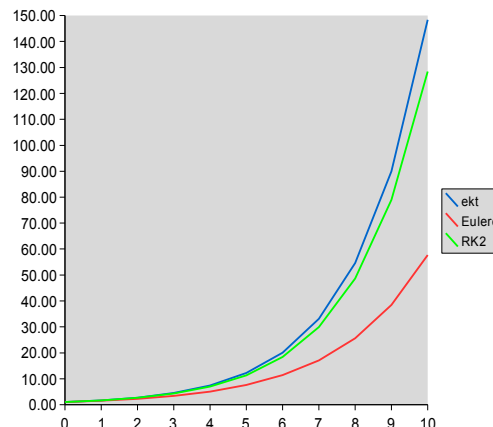
Un confronto nel caso  $x(t+\Delta t) = x(t) + kx(t)\Delta t$

$t_0$	0
$t$	5
$x(t_0)$	1
$\Delta t$	1
$k$	0.5

$t$	$x(t)$	$x(t)$	$x(t) \cdot 1.5^t$
	$e^t$	Eulero	RK2
0	1.00	1.00	1.00###
1	1.65	1.50	1.63###
2	2.72	2.25	2.64###
3	4.48	3.38	4.29###
4	7.39	5.06	6.97###
5	12.18	7.59	11.33###
6	20.09	11.39	18.41###
7	33.12	17.09	29.92###
8	54.60	25.63	48.62###
9	90.02	38.44	79.01###
10	148.41	57.67	128.39

Eulero:  $C12 + \$B\$7 * C12 * \$B\$6$   
cioè:  $this + k * this * timeD$

RK2:  $E12 + (F12/3) + (2 * H12/3)$   
cioè:  $this + (k * this * timeD / 3) + (2 * f(x) * timeD / 3)$   
con  $x = this + (3 * k * this * timeD / 4)$



L'esempio di un confronto numerico tra integrazione analitica, integrazione secondo Eulero e secondo RK2.

La scelta dell'algoritmo di integrazione consente dunque di determinare la modalità di ricalcolo della funzione di stato prossimo delle variabili di stato definite a partire dalla rappresentazione canonica. Questo ci consente di chiarire meglio la relazione tra la rappresentazione canonica stessa e la funzione di integrazione  $integral(y)$  introdotta sopra: se nel caso in cui si adotta l'algoritmo di integrazione di Eulero  $integral(y)$  coincide con  $this + y * \Delta t$ , in generale tale funzione calcola quello che potrebbe essere chiamato l'"integrale discreto" della funzione suo argomento in accordo all'algoritmo di integrazione scelto.

## 7. La formalizzazione del comportamento di un sistema

Come abbiamo già considerato, la logica generale che ispira la costruzione di modelli nella Teoria dei Sistemi è di tipo strutturale: è rilevante non la *natura* dei sistemi, ma solo il *modo* con cui essi sono organizzati; da un punto di vista dinamico, è rilevante non *perché* ma *come* i sistemi evolvono nel tempo. Si suppone dunque che un sistema possa essere interpretato come *un'entità che manifesta un comportamento*

(un output, un effetto) in risposta a uno stimolo (un input, una causa) che gli proviene dall'esterno. La formalizzazione che se ne dà abitualmente è di tipo funzionale:

$$\xrightarrow{\text{input}(t)} [\text{funzione}] \xrightarrow{\text{output}(t)}$$

*L'interpretazione funzionale di un sistema.*

La dinamica di un sistema è descritta da una funzione il cui valore in ogni istante dipende in particolare dal valore che il sistema riceve in ingresso in quello stesso istante (si noti che si tratta di una funzione i cui valori e i cui risultati sono entità variabili nel tempo, e quindi a loro volta funzioni). E' questa la logica alla base del (meta-)modello "a scatola nera", secondo cui un sistema può essere analizzato nel suo comportamento prescindendo dal "come è fatto dentro" e limitandosi a studiarne l'interfaccia, dunque appunto le relazioni tra input e output. E', a sua volta, questa la logica delle procedure di analisi top-down, che si focalizzano dapprima sugli aspetti generali di un sistema, e quindi appunto sul suo comportamento "dal punto di vista dell'interfaccia", ponendo l'attenzione sui dettagli solo successivamente e solo se e in quanto richiesto.

La funzione che descrive il comportamento del sistema trasforma dunque i suoi input, che sono variabili nel tempo, in output che a loro volta variano nel tempo. Per evitare di appesantire la notazione, manterremo lo stesso simbolo per le funzioni a dipendenza temporale e per i loro valori, e indicheremo perciò (rispettando con ciò le tradizionali convenzioni della Teoria dei Sistemi) con:

- $U$  e  $Y$  gli *insiemi degli input e degli output* rispettivamente;
- $u: T \rightarrow U$  la *funzione di input* al sistema, che dunque in ogni istante  $t \in T$  descrive l'input  $u = u(t)$ ,  $u \in U$ ;
- $y: T \rightarrow Y$  la *funzione di output* dal sistema, che dunque in ogni istante  $t \in T$  descrive l'output  $y = y(t)$ ,  $y \in Y$ ,

avendo inoltre indicato con  $T$  l'*insieme dei tempi* in cui si intende analizzare / simulare la dinamica del sistema.

Si noti a proposito di questa notazione che per semplicità:

- tralasciamo di indicare esplicitamente l'eventuale natura vettoriale dei termini (che generalmente, per semplicità, assumeremo scalari);
- "sovraccarichiamo" i termini  $u$  e  $y$  che, in dipendenza del contesto, rappresentano a volte funzioni e altre volte valori di tali funzioni.

In cambio della semplicità così ottenuta si introducono delle ambiguità, da risolvere caso per caso in funzione del contesto di uso dei simboli.

Per una prima categoria di sistemi, il comportamento dipende solo dalla funzione di input, oltre che da eventuali parametri, che manteniamo impliciti. In altri termini, in ogni istante  $t \in T$  l'input  $u(t)$  è sufficiente per ricostruire / calcolare l'output  $y(t)$ . In tal caso si indica con:

$$\eta: U \rightarrow Y$$

la *funzione di comportamento* del sistema, che dunque descrive la dipendenza funzionale degli output dagli input. Si noti che tra le due funzioni  $y$  e  $\eta$  vale la relazione:

$$y(t) = \eta(u(t))$$

cosa che almeno in parte giustifica l'abitudine di chiamare  $\eta$  direttamente funzione di output.

Sistemi modellizzati in questo modo vengono chiamati *combinatori*, poiché il loro output è determinato come combinazione istantanea degli input. Si tratta perciò di sistemi senza memoria: operativamente, ogni volta che un sistema combinatorio riceve un certo input produce sempre lo stesso output.

Traiamo dalla fisica l'esempio di un semplice sistema combinatorio: un circuito costituito da un generatore di tensione,  $V = V(t)$ , in serie con un resistore di resistenza  $R$ , supposta costante. Se siamo interessati al valore dell'intensità di corrente  $i(t)$  che si stabilisce nel circuito, si ha dunque che:

- la funzione di input, che formalizza la sollecitazione a cui il sistema è sottoposto nella sua interazione con l'ambiente, è  $u(t) = V(t)$ ;
- l'unico parametro è  $k = R$ ;
- la funzione di output, che formalizza la risposta del sistema allo input, è  $y(t) = i(t)$ ;
- la funzione di comportamento è naturalmente la legge di Ohm:  $\eta(u(t)) = i(t) = \frac{V(t)}{R}$ .

Il comportamento di un sistema combinatorio è dunque formalizzato da un'equazione algebrica, i cui termini non costanti dipendono in modo sincrono dal tempo. Ne segue, in particolare, che quando un sistema viene modellizzato come combinatorio si sceglie di considerare come non rilevanti gli eventuali

ritardi che nel sistema si generano tra il momento in cui viene ricevuto uno stimolo e il momento in cui si produce la corrispondente risposta.

D'altra parte, per lo stesso sistema potremmo essere interessati alla potenza dissipata ai capi del resistore; in tal caso:

- la funzione di input è  $u(t)=V(t)$  ;
- l'unico parametro è  $k=R$  ;
- la funzione di output è  $y(t)=P(t)$  ;
- la funzione di comportamento è data dalla legge di Joule:  $\eta(u(t))=\frac{V^2(t)}{R}$  .

Dello sistema fisico introdotto nell'esempio precedente abbiamo dunque creato un modello differente (anch'esso combinatorio, come è facile constatare). Il modello che si fa di un sistema dunque dipende dal (e perciò, se costruito appropriatamente, esprime il) "punto di vista" che si assume sul sistema stesso.

Di uno stesso sistema si possono produrre modelli diversi (assumendo che sia possibile identificare un sistema a priori rispetto a un suo modello, cosa evidentemente molto opinabile e generalmente considerata accettabile solo a una prima approssimazione), secondo almeno tre possibili condizioni:

- i modelli non sono reciprocamente confrontabili ma esprimono punti di vista *compatibili* sul sistema (è il caso appena introdotto);
- i modelli esprimono punti di vista *incompatibili* sul sistema (è il caso di modelli in competizione; si presenterebbe, per esempio, se qualcuno sostenesse che  $V(t)=Ri^2(t)$  – una relazione opinabile quantomeno per ragioni dimensionali, comunque... – invece della legge di Ohm);
- i modelli esprimono punti di vista compatibili sul sistema e sono in relazione reciproca di *raffinamento*.

Questo terzo caso è di particolare importanza: si potrebbe per esempio giungere a includere nel modello gli effetti della dipendenza termica della resistenza, formalizzando quindi la resistenza stessa non più come un parametro ma come una funzione della temperatura e quindi, a sua volta, del tempo (cosicché la legge di Ohm verrebbe ora scritta  $V(t)=R(t)i(t)$  ). Questo è un modello più raffinato di quello iniziale, e perciò il passaggio dal primo al secondo è un esempio di un processo top-down.

I due modelli che abbiamo costruito negli esempi precedenti hanno una differenza rilevante: mentre quello basato sulla legge di Ohm è lineare, quello basato sulla legge di Joule non lo è. Infatti solo per il primo vale il principio di sovrapposizione degli effetti ("sovrapponendo le cause si sovrappongono gli effetti"): se  $i_1$  e  $i_2$  sono gli output del sistema agli input  $V_1$  e  $V_2$  rispettivamente (cioè se  $i_1=V_1/R$  e  $i_2=V_2/R$  ), allora  $i_1+i_2$  è l'output a  $V_1+V_2$  (infatti è vero che  $i_1+i_2=(V_1+V_2)/R$  ), mentre ovviamente  $P_1+P_2 \neq (V_1+V_2)^2/R$  se  $P_1=V_1^2/R$  e  $P_2=V_2^2/R$  .

Si riconferma così quanto abbiamo già considerato in precedenza: *la linearità è una caratteristica non dei sistemi, ma dei loro modelli*. Dunque la fraseologia "sistema (non) lineare" dovrebbe essere intesa, a rigore, come una semplice abbreviazione di "sistema modellizzato come (non) lineare".

## 7.1. Modelli sequenziali

Prendiamo ora ancora una volta ad esempio un semplice sistema meccanico modellizzabile mediante la seconda legge della dinamica,  $F(t)=ma(t)$  . Questa equazione è formalmente identica alla legge di Ohm, e, se assumiamo che formalizzi il comportamento di un sistema che risponde con un'accelerazione  $a(t)$  alla sollecitazione determinata dalla forza  $F(t)$  e quindi la riscriviamo come  $a(t)=F(t)/m$  , assume esattamente la forma richiesta  $y(t)=\eta(u(t))$  , dove in tal caso:

- la funzione di input è  $u(t)=F(t)$  ;
- l'unico parametro è  $m$  ;
- la funzione di output è  $y(t)=a(t)$  ;
- la funzione di comportamento è  $\eta(u(t))=a(t)=\frac{F(t)}{m}$  .

Secondo questa interpretazione, il modello in questione è dunque combinatorio. Nondimeno, quando si studia un sistema meccanico si è interessati (cioè, secondo la concettualizzazione della Teoria dei Sistemi, si sceglie come funzione di output) generalmente non all'accelerazione  $a(t)$  che la forza  $F(t)$  imprime sul corpo, ma alla posizione  $p(t)$  che nel tempo il corpo stesso assume. Come abbiamo già considerato in precedenza, la legge che esprime la funzione di comportamento può allora essere riscritta come un'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$$



o anche come un sistema di due equazioni differenziali di ordine uno:

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = \frac{F(t)}{m} \end{cases}$$

cioè come rappresentazione canonica, che a tempo discreto può essere riscritta:

$$\begin{cases} p(t+\Delta t) = p(t) + v(t)\Delta t \\ v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{F(t)}{m}\Delta t \end{cases}$$

e quindi:

$$\varphi(p) \leftarrow \text{integral}(v)$$

$$\varphi(v) \leftarrow \text{integral}(F/m)$$

Se assumiamo che proprio il valore  $p(t)$  rappresenti la funzione di output del sistema, appare chiara la natura non combinatoria di questo modello. La conoscenza dell'input in un certo istante non è infatti sufficiente per ottenere l'output in quello stesso istante. Se ne ricava una definizione operativa: si chiama *stato* di un sistema l'insieme delle variabili i cui valori è necessario conoscere, insieme con l'input, per ricostruire la dinamica del sistema stesso.

In questo caso, la funzione di comportamento assume perciò la forma:

$$\eta: U \times X \rightarrow Y$$

che è evidentemente più generale di quella introdotta sopra per i sistemi combinatori, in cui:

- $X$  è l'*insieme degli stati*, sulla cui struttura algebrica, proprio come nel caso di  $U$  e  $Y$ , non sono fatte a priori ipotesi, che quindi, in particolare, possono essere continui o discreti.

La variabile  $x(t)$  nella funzione di comportamento  $y(t) = \eta(u(t), x(t))$  rappresenta dunque lo *stato* del sistema.

Per ottenere qualche indicazione aggiuntiva sulle caratteristiche dei sistemi non combinatori, interveniamo su una rappresentazione canonica integrando ambo i termini di ognuna delle sue equazioni:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(u(\tau), x(\tau)) d\tau$$

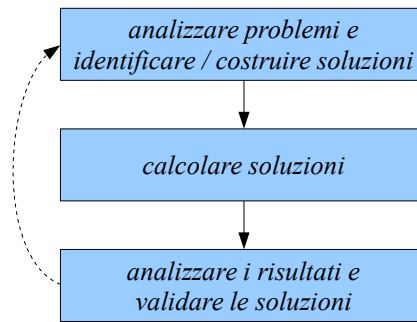
e ottenendo così un sistema di equazioni integrali. Questa forma mette in evidenza che per ricavare l'output in un certo istante non è sufficiente la conoscenza dell'input in quell'istante, ma occorre disporre dell'intera successione temporale degli input e dei valori  $x(t)$ . Per questa ragione, sistemi di questo genere sono detti *sequenziali*.

Operativamente, a parità di input un sistema sequenziale può generare output diversi, in funzione della sua evoluzione precedente, e lo stato di un sistema sequenziale dovrebbe essere scelto in modo tale da consentire, congiuntamente con l'input, la ricostruzione della dinamica del sistema stesso.

Si noti come di uno stesso sistema abbiamo fornito inizialmente un modello combinatorio,  $a(t) = F(t)/m$ , che poi abbiamo trasformato, rendendolo sequenziale. Anche a questo riguardo, vale dunque quanto abbiamo già considerato a proposito della linearità: *l'essere combinatorio o sequenziale non è una caratteristica di un sistema in sé, ma del modello che se ne considera*, così che la fraseologia "sistema combinatorio" (o "sequenziale") dovrebbe essere intesa, a rigore, come una forma abbreviata per "sistema modellizzato come combinatorio" (o "sequenziale").

## 8. La sintesi: la settupla

In accordo al punto di vista della Teoria dei Sistemi presentato finora, il processo con cui, a partire da ipotesi modellistiche, si giunge a una previsione sul comportamento del sistema modellizzato può essere descritto come strutturato in tre macro-fasi:



*La struttura generale del processo di costruzione e uso di modelli.*

La prima macro-fase è evidentemente critica, e può essere intesa come un'attività di:

- formulazione (in italiano, o in un linguaggio semi-formale, per esempio diagrammi UML) delle caratteristiche richieste al modello;
- traduzione di tale formulazione in una versione trattabile formalmente, che in particolare possa essere oggetto di simulazione e quindi sia espressa in forma matematica.

A questo proposito la Teoria dei Sistemi offre alcune linee guida, nella forma di *condizioni formali necessarie* per la correttezza della soluzione (non sono, evidentemente, sufficienti...), descritte mediante una *settopla* di elementi, che sintetizzano molto di quanto introdotto finora a proposito della costruzione di modelli di sistemi dinamici.

In termini procedurali, occorre specificare, nell'ordine:

- l'*insieme dei tempi*  $T$  in cui si intende analizzare / simulare la dinamica:  $T$  può essere un intervallo reale,  $T=[t_0, t_1]$ , nell'ipotesi di tempo continuo, oppure una successione  $T=\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ , nell'ipotesi di tempo discreto; in questo secondo caso, se, come è spesso ragionevole, gli istanti  $t_i$  sono equidistanti,  $t_{i+1}=t_i+\Delta t$ , l'insieme dei tempi è definito semplicemente dall'istante iniziale dell'analisi,  $t_0$ , all'istante finale,  $t_n$ , e dall'intervallo  $\Delta t$ ; nel caso il sistema sia modellizzato come costituito da più sottosistemi, si assume generalmente che l'insieme dei tempi sia lo stesso per tutti i sottosistemi; gli altri sei elementi della settopla sono invece specifici ai singoli sottosistemi;
- l'*insieme degli input*  $U=\{u_i\}$  che il sistema ammette; sulla struttura algebrica di questo insieme non vengono fatte a priori ipotesi, e quindi, in particolare, può essere continuo o discreto; nel caso in cui siano presenti più variabili scalari di input, ogni elemento  $u_i$  è il vettore che include tali variabili come componenti, e  $U$  è l'insieme prodotto cartesiano degli insiemi di variabilità di ognuna di tali componenti;
- l'*insieme delle funzioni di input ammesse*  $\Omega=\{u(\cdot)\}$ , essendo  $u:T\rightarrow U$  appunto la funzione di input al sistema, che dunque in ogni istante  $t\in T$  descrive l'input  $u=u(t)$ ,  $u\in U$ ; la funzione di input formalizza l'influsso dell'ambiente sul sistema, e perciò può non essere nota a priori nella sua forma analitica (per esempio perché in ogni istante il suo valore potrebbe essere assegnato da un soggetto esterno al sistema stesso); attraverso l'insieme  $\Omega$  si possono dunque specificare eventuali vincoli di ammissibilità sugli input che il sistema riceve all'ambiente (nel caso di tempo continuo, tipicamente potrebbe essere che si imponga che  $u(t)$  sia a sua volta una funzione continua);
- l'*insieme degli output*  $Y=\{y_i\}$  che si sceglie di osservare; sulla struttura algebrica di questo insieme non vengono fatte a priori ipotesi, e quindi, in particolare, può essere continuo o discreto; come nel caso degli input, nel caso in cui siano presenti più variabili scalari di output, ogni elemento  $y_i$  è il vettore che include tali variabili come componenti, e  $Y$  è l'insieme prodotto cartesiano degli insiemi di variabilità di ognuna di tali componenti;
- l'*insieme degli stati*  $X=\{x_i\}$  del sistema, e in particolare lo stato iniziale  $x(t_0)$ ; sulla struttura algebrica di questo insieme non vengono fatte a priori ipotesi, e quindi, in particolare, può essere continuo o discreto; come nel caso degli input e degli output, nel caso in cui siano presenti più variabili scalari di stato, ogni elemento  $x_i$  è il vettore che include tali variabili come componenti, e  $X$  è l'insieme prodotto cartesiano degli insiemi di variabilità di ognuna di tali componenti;
- la *funzione di transizione di stato locale* (o *di stato prossimo*)  $\varphi:U\times X\rightarrow X$ ; questa funzione è diacronica, e quindi nel caso di tempo discreto  $x(t+\Delta t)=\varphi(u(t), x(t))$ ; se l'insieme  $X$  include elementi vettoriali,  $\varphi$  è a sua volta una funzione vettoriale, che può essere dunque descritta come un vettore di funzioni scalari;

- la *funzione di comportamento*  $\eta: U \times X \rightarrow Y$ ; questa funzione è sincronica, e quindi nel caso di tempo discreto  $y(t) = \eta(u(t), x(t))$ , essendo  $y: T \rightarrow U$  la *funzione di output* al sistema; se l'insieme  $Y$  include elementi vettoriali,  $\eta$  è a sua volta una funzione vettoriale, che può essere dunque descritta come un vettore di funzioni scalari.

Nella formalizzazione introdotta in precedenza, dunque:

$$\text{nodo-expr} \leftrightarrow y(t) = \eta(u(t), x(t))$$

$$\text{nodo-init} \leftrightarrow x(t_0)$$

$$\text{nodo-trans} \leftrightarrow x(t + \Delta t) = \varphi(u(t), x(t))$$

Un sistema  $\Sigma$  è dunque descritto dalla settupla:

$$\Sigma = \langle T, U, \Omega, Y, X, \varphi, \eta \rangle$$

Sono casi particolari di questa settupla:

- i sistemi *autonomi*, per i quali l'insieme  $U$  è vuoto (e quindi l'insieme  $\Omega$  non è definito), con la conseguenza che la dinamica del sistema non è controllabile dall'esterno; per un sistema autonomo la funzione di transizione di stato locale e la funzione di comportamento hanno la forma rispettivamente  $\varphi: X \rightarrow X$  e  $\eta: X \rightarrow Y$ ;
- i sistemi *combinatori*, per i quali l'insieme  $X$  è vuoto, con la conseguenza che la funzione di transizione di stato locale è assente e funzione di comportamento ha la forma  $\eta: U \rightarrow Y$ .

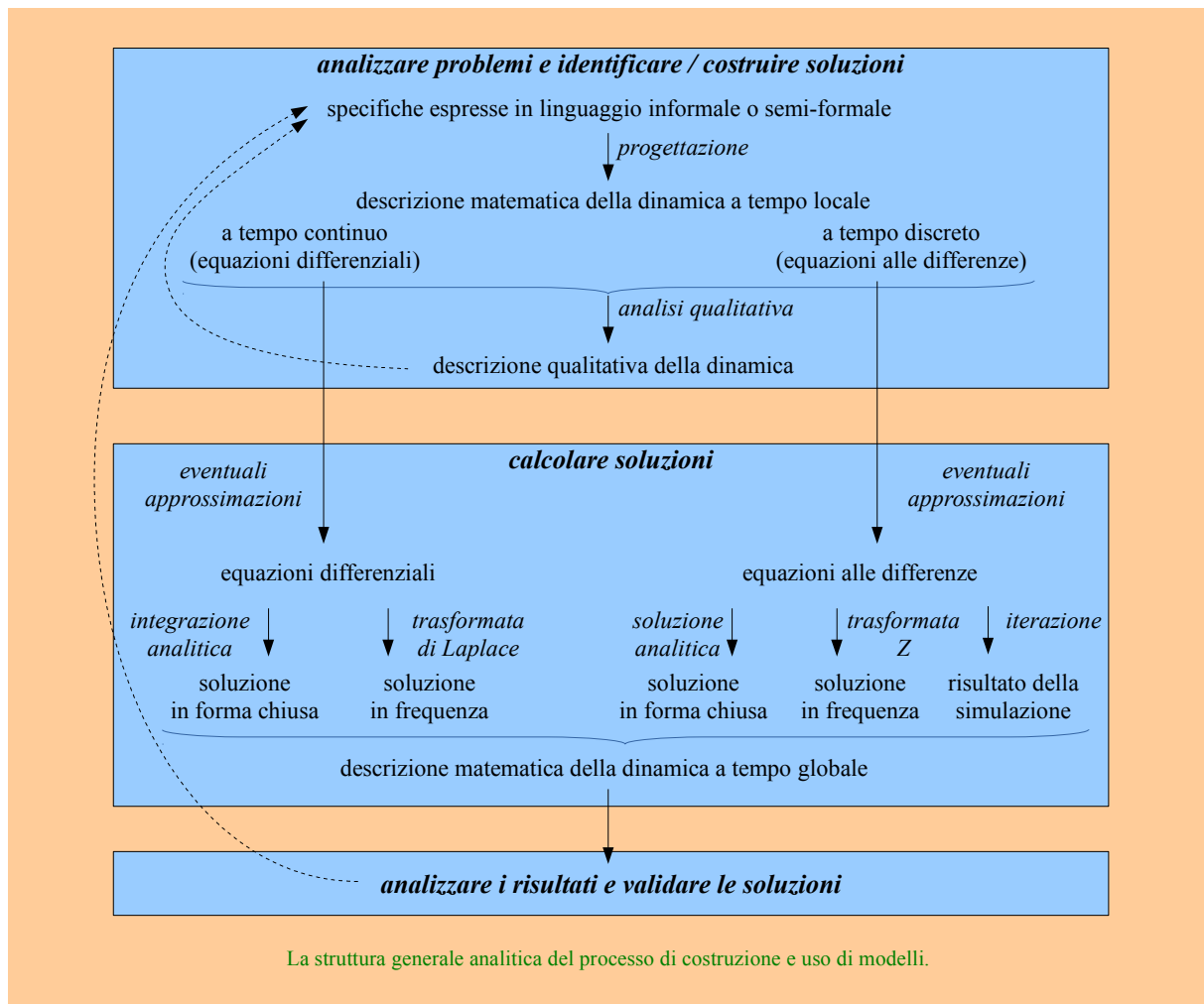
E' allora evidente che un sistema che sia modellizzato nello stesso tempo come autonomo e combinatorio deve avere un output costante, e perciò è *statico*.

In sintesi:

		con stati?	
		no	sì
con input?	no	statico	sequenziale autonomo
	sì	combinatorio	sequenziale aperto

La classe di sistemi modellizzabili mediante questa settupla è ampia, ma non del tutto generale: analizzeremo nel seguito alcune possibili estensioni al riguardo.

Al fine di meglio collocare il ruolo svolto dalla settupla in quanto strumento a supporto dell'analisi e progettazione di modelli di sistemi dinamici, lo schema in tre macro-fasi introdotto sopra può essere meglio specificato come segue.



## 9. Strumenti per la progettazione: design pattern

La settupla è uno strumento a supporto della progettazione *in logica top-down*: dalle ipotesi modellistiche si ricavano gli input e gli output, dunque ancora “mantenendo chiusa” la black box, e da questi si arriva a stabilire se è necessario introdurre uno stato, dunque cominciando ad “aprire la scatola” stessa. Se poi a questo punto il modello appare troppo complesso, si ripete il processo analizzando il modello attraverso l’introduzione di sotto-modelli interagenti, di ognuno dei quali si procede a scegliere la settupla.

In modo complementare, quando si progetta è spesso utile disporre di soluzioni predefinite per problemi ricorrenti, che *in logica bottom-up* possono essere riutilizzate come componenti elementari nella costruzione dei modelli (un’appropriata combinazione di queste due logiche di progettazione, “dall’alto” e “dal basso”, si chiama *meet-in-the-middle*). Si tratta dunque di schemi di progettazione, *design pattern* appunto.

Presentiamo qui alcuni semplici pattern utili nella progettazione di modelli di sistemi dinamici (ogni volta che la funzione di comportamento non è indicata, si assume che  $y(t)=x(t)$ , e quindi che:

$$x\text{-expr} \leftarrow \text{this}$$

in modo equivalente).

**Contatore:** si tratta di un modello autonomo che assume i valori 0, 1, 2, ... nel corso del tempo;

$$x\text{-init} \leftarrow 0$$

$$x\text{-trans} \leftarrow 1 + \text{this}$$

**Oscillatore 0/1:** si tratta di un modello autonomo che alterna i valori 0, 1, 0, 1, ... nel corso del tempo;

$$x\text{-init} \leftarrow 0$$

$$x\text{-trans} \leftarrow 1 - \text{this}$$

**Memoria del valore iniziale:** si tratta di un modello che mantiene il valore  $u$  ricevuto in input all'istante iniziale;

$$x\text{-init} \leftarrow u$$

$$x\text{-trans} \leftarrow \text{this}$$

**Linea di ritardo:** si tratta di un modello che fornisce in output l'input  $u$  ricevuto all'istante precedente;

$$x\text{-init} \leftarrow (\text{non rilevante})$$

$$x\text{-trans} \leftarrow u$$

**Integratore (a tempo discreto):** si tratta di un modello che calcola l'“integrale discreto” della successione ricevuta in input  $u$ ; a partire da:

$$y(t) = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

(in cui dunque l'integrale definito è funzione dell'estremo superiore di integrazione) si approssima:

$$y(t) = \sum_{i=t_0}^t u(i) \Delta t$$

(si assume dunque che i valori dell'indice  $i$  siano  $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2 \Delta t, \dots$ );

$$x\text{-init} \leftarrow (\text{in generale non determinabile a priori})$$

$$x\text{-trans} \leftarrow \text{this} + u * \Delta t$$

cioè:

$$x\text{-trans} \leftarrow \text{integral}(u)$$

**Derivatore (a tempo discreto):** si tratta di un modello che calcola la “derivata discreta” della successione ricevuta in input  $u$ ; a partire da:

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

si approssima:

$$y(t) = \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

forma che però non è utilizzabile, dato che richiederebbe la previsione del valore dell'input, cosa per definizione non possibile; si accetta perciò di calcolare:

$$y(t) = \frac{u(t) - u(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

dunque ritardando di un  $\Delta t$  il calcolo; per ottenere  $u(t - \Delta t)$  si usa il pattern linea di ritardo;

$$x\text{-init} \leftarrow (\text{in generale non determinabile a priori})$$

$$x\text{-trans} \leftarrow u$$

$$x\text{-expr} \leftarrow (u - \text{this}) / \Delta t$$

**Sistema con dinamica a convergenza spontanea:** si tratta di un modello con una variabile caratteristica  $x$  che a partire da uno stato iniziale  $x_0$  converge verso un “parametro di ambiente”  $k_1$  con una dinamica regolata da un parametro di inerzia  $k_2$ ;

$$x\text{-init} \leftarrow x_0$$

$$x\text{-trans} \leftarrow \text{this} + ((k_1 - \text{this}) / k_2) * \Delta t$$

cioè:

$$x\text{-trans} \leftarrow \text{integral}((k_1 - \text{this}) / k_2)$$

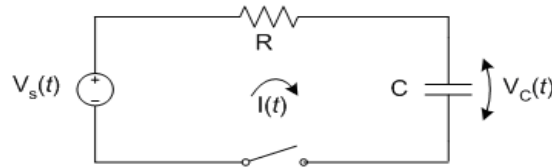
## 10. Analisi numerica dei sistemi lineari del primo e del secondo ordine

Allo scopo di mettere alla prova questa modellistica, può essere utile prendere in esame, attraverso degli esempi, due classi particolarmente semplici di sistemi, la cui dinamica è descritta da un'equazione differenziale rispettivamente del primo e del secondo ordine, e che per brevità vengono chiamati *sistemi del primo ordine* e *sistemi del secondo ordine*. Nel caso in cui tali sistemi vengano assunti come lineari, è possibile studiare il loro comportamento in forma analitica attraverso la loro funzione di trasferimento, a

partire dall'applicazione della trasformata di Laplace. Noi opereremo qui invece in forma numerica, con l'obiettivo di rendere simulabile la dinamica di tali sistemi: assumeremo inizialmente l'ipotesi di linearità, per mostrare poi come da un punto di vista numerico essa possa essere abbandonata senza con ciò perdere la possibilità di ottenere risultati appropriati dalla simulazione.

## 10.1. Sistemi del primo ordine

Consideriamo l'esempio del circuito RC in serie:



La struttura del circuito RC in serie.

Le variabili in gioco sono quelle indicate: la tensione del generatore  $V_s(t)$ , la resistenza  $R$ , la capacità  $C$ , la tensione ai capi del condensatore  $V_C(t)$  e l'intensità di corrente  $I(t)$  che si stabilisce nel circuito. Sembra ragionevole che  $V_s(t)$  e  $I(t)$  siano la variabile di input e di output rispettivamente e che  $R$  e  $C$  siano trattate da costanti. L'equazione della maglia è, naturalmente:

$$V_s(t) = V_R(t) + V_C(t)$$

in cui  $V_R(t)$  è la differenza di potenziale ai capi del resistore, che per la legge di Ohm è  $V_R(t) = RI(t)$ . Quindi:

$$I(t) = \frac{V_s(t) - V_C(t)}{R}$$

Occorre a questo punto determinare il valore di  $V_C(t)$ , che può essere derivato dalla caratteristica del condensatore:

$$I(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

da cui:

$$\frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{I(t)}{C} = \frac{V_s(t) - V_C(t)}{RC}$$

Si tratta della rappresentazione canonica del sistema, da cui si conclude che la funzione  $V_C(t)$  è l'unica variabile di stato del sistema stesso.

- ✓ Si implementi in un sistema di simulazione questa equazione differenziale e si studi la dinamica del sistema al variare dei parametri  $R$  e  $C$  e della funzione di input  $V_s(t)$ .

La precedente equazione differenziale può essere riscritta come segue:

$$RC \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_s(t)$$

con ciò mostrando che si tratta di un caso particolare della *forma generale per un sistema lineare del primo ordine*:

$$k_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k_2 u(t)$$

dove dunque  $x(t)$  è la variabile di stato e  $u(t)$  l'input del sistema e:

- $k_1$  è detta *costante di tempo*;
- $k_2$  è detta *sensibilità statica*.

Discretizzando la derivata a sinistra del segno di uguale, si ottiene:

$$V_C\text{-trans} \leftarrow \text{integral}((k_2 * u - \text{this}) / k_1)$$

Un sistema di questo genere può essere studiato in risposta:

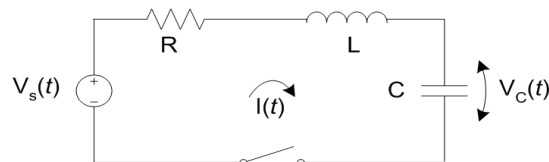
- a input costante, cioè a una funzione di input del tipo  $u(t) = k$ ;
- al gradino, cioè a una funzione di input del tipo  $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \bar{t} \\ k & \text{altrimenti} \end{cases}$ ;

- all'impulso, cioè a una funzione di input del tipo  $u(t) = \begin{cases} k & \text{se } t = \bar{t} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$  ;
- alla rampa, cioè a una funzione di input del tipo  $u(t) = kt$  ;
- a un segnale sinusoidale, cioè a una funzione di input del tipo  $u(t) = \sin(kt)$  .

✓ Si implementi in un sistema di simulazione un generico sistema lineare del primo ordine e se ne studi la dinamica per le quattro tipologie di input indicate.

## 10.2. Sistemi del secondo ordine

Consideriamo l'esempio del circuito RLC in serie:



*La struttura del circuito RLC in serie.*

Riprendendo l'analisi già effettuata sul circuito RC, si nota che l'equazione della maglia è in questo caso:

$$V_S(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

in cui:

- $V_R(t) = RI(t)$  (caratteristica del resistore);
- $I(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$  (caratteristica del condensatore);
- $V_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$  (caratteristica dell'induttore).

La presenza di due derivate prime di variabili diverse,  $V_C(t)$  e  $I(t)$ , indica che si tratta di un sistema del secondo ordine, le cui variabili di stato sono la tensione ai capi del condensatore  $V_C(t)$  e l'intensità di corrente  $I(t)$  :

$$\begin{cases} \frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{I(t)}{C} \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{V_L(t)}{L} \end{cases}$$

e infine, eliminando il riferimento esplicito a  $V_L(t)$  grazie all'equazione della maglia, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{I(t)}{C} \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{L}(V_S(t) - RI(t) - V_C(t)) \end{cases}$$

✓ Si implementi in un sistema di simulazione questo sistema di equazioni differenziali e si studi la dinamica del sistema al variare dei parametri  $R$ ,  $L$  e  $C$  e della funzione di input  $V_S(t)$  .

La forma generale per un sistema lineare del secondo ordine è:

$$a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_0 u(t)$$

e definendo:

- $K = b_0/a_0$  : sensibilità statica;
- $P = \sqrt{a_0/a_2}$  : pulsazione naturale;
- $S = a_1/2\sqrt{a_0 a_2}$  : rapporto di smorzamento,

si ottiene:

$$\frac{1}{P^2} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{2S}{P} \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = K u(t)$$

Introducendo una variabile intermedia  $y$  tale che:

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$$

e quindi:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{dy(t)}{dt}$$

l'equazione precedente si trasforma nel sistema:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -2SPy(t) - P^2x(t) + P^2Ku(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \end{cases}$$

che può essere facilmente reso discreto e simulato.

✓ La dinamica di un oscillatore armonico smorzato, per esempio un pendolo con attrito, è definita dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} + a \frac{d\vartheta(t)}{dt} + b \sin(\vartheta(t)) = 0$$

dove:

- $\vartheta(t)$  è la posizione angolare del pendolo;
- $a$  è il rapporto di coefficiente di smorzamento/massa;
- $b$  è il rapporto accelerazione di gravità/lunghezza del braccio (si noti che si tratta dunque di un sistema autonomo).

Si trasformi tale equazione differenziale in un sistema canonico, lo si discretizzi e lo si implementi in un sistema di simulazione, studiando la dipendenza della dinamica del sistema dai parametri indicati, oltre che dal passo di simulazione  $\Delta t$ .

Notando che si tratta di un sistema non lineare, a causa della presenza della funzione seno, si analizzino le differenze nella dinamica del sistema nel caso in cui esso venga opportunamente linearizzato. Si sperimenti infine un'estensione al modello ottenuta introducendo un input al sistema, con la semantica di sollecitazione forzante.

## 11. Quando *non* usare questa (meta-)modellistica

Come ogni strumento, anche la questa *modellistica per fare modelli* (in breve: meta-modellistica) che abbiamo introdotto, sintetizzata dalla settupla  $\Sigma = \langle T, U, \Omega, Y, X, \varphi, \eta \rangle$ , è appropriata in certe situazioni e poco adeguata, o addirittura inutilizzabile, in certe altre. E' dunque importante conoscerne il *campo di applicazione*.

Non è il caso di usare questa meta-modellistica in particolare quando:

- il sistema in esame non ha una dipendenza significativa dal tempo, e quindi è appropriatamente interpretabile come *statico*. Come abbiamo visto, un sistema di questo genere è modellizzabile mediante una settupla, ponendo come condizioni che sia l'insieme degli input  $U$  sia l'insieme degli stati  $X$  siano vuoti. Ne segue che la funzione di comportamento  $\eta$  ha un dominio vuoto, e quindi corrisponde a una costante, come ci si aspetta da un sistema considerato appunto statico. Usare questa meta-modellistica in questo caso non è sbagliato, ma semplicemente inutile;
- il sistema in esame è *combinatorio*. Come nel caso precedente, un sistema di questo genere può essere modellizzato mediante una settupla, nella condizione che l'insieme degli stati  $X$  sia vuoto, e quindi che la funzione di stato prossimo  $\varphi$  non sia definita. La funzione di comportamento diventa allora  $\eta: U \rightarrow Y$ , e quindi  $y(t) = \eta(u(t))$ . Nuovamente, dunque, usare questa meta-modellistica in questo caso non è sbagliato, ma poiché la trasformazione operata dal sistema è di tipo algebrico (l'output dipende istantaneamente dall'input) il sistema non ha alcuna evoluzione e quindi, in pratica, non c'è nulla da simulare;
- è nota un'espressione analitica che descrive la *dinamica globale* per il sistema in esame. Nella formulazione della settupla, è richiesto di esprimere la funzione di transizione di stato locale,  $\varphi: U \times X \rightarrow X$ , che a tempo discreto ha la forma  $x(t + \Delta t) = \varphi(u(t), x(t))$ . Nella definizione della  $\varphi$  si mantiene dunque implicita la funzione  $x(t)$ , che descrive la dinamica del sistema in funzione del tempo. In certi casi dalla  $\varphi$  è possibile ricavare la funzione di transizione di stato globale, che ha la forma  $x(t) = \Phi(t_0, t, u_{[t_0, t]}, x(t_0))$  (con  $u_{[t_0, t]}$  si indica l'insieme dei valori che la funzione di input  $u$  assume nell'intervallo  $[t_0, t]$ ; la forma nel caso discreto è analoga) e che quindi consente di



calcolare il valore dello stato  $x(t)$  in ogni istante. Se la  $\Phi$  è nota in forma analitica, questa meta-modellistica è ancora una volta inutile, dato che lo stato del sistema può essere ricavato per calcolo diretto, senza alcun bisogno di simulazione.

Quest'ultimo punto è particolarmente rilevante, e quindi merita di essere analizzato mediante un esempio. Riprendiamo ancora una volta il secondo principio della dinamica, espresso in forma differenziale:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$$

Di questa equazione differenziale è ben nota la soluzione in vari casi, in dipendenza del valore dell'input  $F(t)$ . La situazione più semplice è evidentemente quella in cui  $F(t)$  è nullo per ogni  $t$  (e quindi il sistema è autonomo), cioè, da un punto di vista dell'interpretazione del fenomeno fisico modellizzato, la somma delle forze esterne applicate al corpo di massa  $m$  considerato è nulla. Non è difficile integrare l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = 0$$

ottenendo:

$$p(t) = p(t_0) + v(t_0)t$$

espressione della dinamica globale di un sistema inerziale. Non sensibilmente più complesso è il caso del moto uniformemente accelerato:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = k$$

con  $k \neq 0$ , la cui soluzione è:

$$p(t) = p(t_0) + v(t_0)t + \frac{k t^2}{2}$$

E' ben chiaro che in casi di questo genere non c'è nulla da simulare: per conoscere la posizione del corpo in un certo istante è sufficiente calcolare queste espressioni. D'altra parte, rimanendo a questo esempio, l'input  $F(t)$  potrebbe non avere una forma così semplice o addirittura potrebbe non essere esprimibile analiticamente, come accade per esempio quando esso è determinato istante per istante da un soggetto che interagisce con il sistema oppure quando esso include una componente casuale. In situazioni di questo genere un'espressione analitica della dinamica globale del sistema non è ottenibile: l'informazione relativa è invece ricavabile per via numerica, e quindi mediante il calcolo iterato della versione a tempo discreto della funzione di transizione di stato locale.