Teoria dei Sistemi

Un'introduzione alla Teoria Generale dei Sistemi

Questo testo è distribuito con Licenza Creative Commons Attribuzione
Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale

Luca Mari, versione 2.4.16
lmari@liuc.it
http://research.liuc.it/luca.mari
Università Cattaneo – LIUC

[documento liberamente scaricabile dal sito http://research.liuc.it/luca.mari/tds]

Contenuti

1. Descrizione, previsione, decisione

La *capacità di prevedere* eventi futuri è fondamentale, e spesso vitale. E' una capacità che viene abitualmente impiegata per *prendere decisioni in condizioni di incertezza*, quali quelle che appunto presentano eventi non ancora accaduti. La previsione consiste infatti in un'ipotesi sull'accadimento di un evento futuro, compiuta sulla base di informazione disponibile nel presente, e quindi ottenuta dal passato. Pur non essendo strutturalmente davvero complessa e pur essendo impiegata quotidianamente in modo spontaneo, la *logica della previsione* non è immediatamente evidente e merita un minimo di analisi. In molti casi, la regola che, esplicitamente o implicitamente, viene adottata per giungere a una decisione si basa su un *principio di regolarità storica*:

> PRINCIPIO DI REGOLARITÀ STORICA:
> dato che nel passato è sempre successo che, a partire dalle condizioni X, sia quindi accaduto l'evento Y (e non invece gli eventi Y_1, Y_2, ...), e dato che ora si presentano le condizioni X, si può ipotizzare che ora accada Y e non Y_1, Y_2, ...

Questo principio non è certo in grado di fornire la completa certezza che, per esempio, schiacciando un certo interruttore si accenderà una certa lampadina, ma è quello che generalmente adottiamo, spesso implicitamente, per guidare la gran parte dei nostri comportamenti. Su questa base, si applica infatti la più semplice regola decisionale:

REGOLA DI DECISIONE
desiderando che accada Y (e non Y_1, Y_2, ...), si fa in modo di attuare le condizioni X (e non X_1, X_2, ...)

La previsione è dunque uno strumento non solo conoscitivo, ma anche a *supporto delle decisioni*. La capacità di saper prevedere l'evoluzione di un oggetto ha infatti operativamente almeno due possibili ragioni:

1. *se si è in grado di controllare* l'evoluzione dell'oggetto, si può usare la previsione *per decidere come intervenire sull'oggetto* per modificarne, quando necessario, l'evoluzione spontanea e fare in modo che esso evolva in una direzione voluta;
2. *se non si è in grado di controllare* l'evoluzione dell'oggetto, si può usare la previsione *per decidere come modificare il proprio comportamento*, in modo da adattarlo all'evoluzione dell'oggetto.

L'efficacia che la Regola di decisione sistematicamente dimostra conduce all'ulteriore interpretazione di considerare le condizioni come cause, di cui l'evento in questione è effetto. In questo senso, dunque, questa regola esprime in effetti la nostra fiducia in un *principio di relazione causa-effetto*:

PRINCIPIO DI RELAZIONE CAUSA-EFFETTO
ogni volta che una stessa causa opera, produce lo stesso effetto

Vediamo e mettiamo in azione questo principio nella nostra interazione abituale con gli oggetti che ci circondano, che sistematicamente interpretiamo come delle entità che reagendo all'input che ricevono (la causa) producono in risposta un output (l'effetto). Il fatto fondamentale in ciò è che la decisione di generare una causa per produrre un effetto richiede solo di sapere *che* la relazione tra causa ed effetto è presente, e non *perché* lo è. In altri termini, almeno in linea di principio l'efficacia delle decisioni che si prendono non dipende dalla conoscenza della "struttura interna" (qualsiasi cosa ciò significhi) dell'oggetto su cui si decide, che dunque può, almeno sempre in linea di principio, rimanere totalmente nascosta a colui che decide. Un'immagine espressiva che al proposito si adotta è quella della "scatola nera" (*black box*).

Oggetti come "scatole nere".

L'obiettivo di una appropriata decisione (quale input per l'output voluto?) viene raggiunto allorché si è in grado di descrivere la relazione di dipendenza $input(t) \rightarrow output(t)$, e ciò può essere ottenuto "aprendo il coperchio" della scatola, cioè analizzando la struttura interna dell'oggetto allo scopo di comprenderne il funzionamento, ma anche "a scatola chiusa", da cui appunto l'immagine della scatola *nera*, cercando di individuare le caratteristiche di tale relazione a prescindere dalle ragioni che la giustificano. Questa seconda strategia è storicamente sovente associata a un'impostazione concettuale chiamata "comportamentismo": per studiare il comportamento di una persona ci si può affidare solo all'analisi delle relazioni tra input e output, chiamati in questo caso anche *stimoli* e *risposte* rispettivamente (in questo caso "aprire la scatola", cioè esaminare la fisiologia del cervello della persona, è un'attività per ora ancora generalmente considerata non praticabile...). Un atteggiamento di tipo comportamentistico è pressoché inevitabile, dato che ci consente di decidere, e più in generale di sopravvivere, *come se* la complessità dell'oggetto nella scatola potesse essere trascurata, concentrando l'attenzione appunto solo sul suo comportamento, e quindi sulla sua *interfaccia*, di input (su cui operare per generare le cause) e di output (per osservare gli effetti).

Per interpretare correttamente la scatola nera

La scatola nera è un meta-modello (cioè un modello di modelli) focalizzato proprio sul comportamento di sistemi, cioè sulla relazione tra gli input che ricevono dall'ambiente e gli output che producono. Per interpretarlo, e quindi impiegarlo, appropriatamente, è dunque necessario intendere in modo corretto il significato della freccia che entra nella scatola e di quella che esce da essa. Se prendiamo in esame, per esempio, la descrizione di un semplice magazzino, caratterizzato in ogni istante dal numero di prodotti in esso depositati, vediamo che in ogni periodo di tempo considerato nel magazzino entrano e da esso escono prodotti, e quindi che al termine di ogni periodo il numero di prodotti depositati è pari al numero dei prodotti nel periodo precedente incrementato della differenza tra prodotti entrati e prodotti usciti. Ciò mostra che la scelta di descrivere il magazzino come una scatola nera avente in input il numero di

prodotti in ingresso e in output il numero di prodotti in uscita è, in generale, sbagliata. Infatti, la logica di gestione di un magazzino non è certo generalmente tale per cui il numero di prodotti in uscita in un certo periodo di tempo è effetto del (cioè è determinato dal) numero dei prodotti in ingresso in quello stesso periodo. Piuttosto, il numero di prodotti in ingresso e il numero di prodotti in uscita sono determinati da fattori esogeni alla gestione del magazzino: entrambi sono perciò da considerare degli input al magazzino-scatola nera, il cui output potrebbe essere per esempio, in base agli interessi del decisore, il numero di prodotti depositati oppure l'informazione se è possibile o meno consegnare tutti i prodotti ordinati.
In sintesi, nella descrizione "a scatola nera" le frecce rappresentano flussi di informazione, decisioni e risultati conseguenti, e non necessariamente, e solo in casi particolari, flussi di materia o energia.

La relazione causa-effetto ha un ruolo determinante nella scienza e nella tecnologia. Come semplice esempio al proposito, consideriamo il secondo principio della meccanica, usualmente scritto:

$$F = m\,a$$

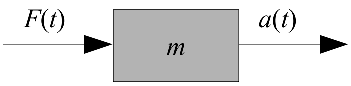
e che può essere interpretato operativamente asserendo che l'applicazione di una forza F a un corpo di massa m produce un'accelerazione:

$$a = \frac{F}{m}$$

In questa formulazione si riconosce in azione la logica della causalità: la causa F produce l'effetto a. L'ipotesi che abitualmente si assume poi è che la massa del corpo sia costante, e che invece la forza, e di conseguenza l'accelerazione, possano variare nel tempo, e quindi che le due grandezze F e a siano *funzioni del tempo*:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}$$

E' immediato identificare questa forma come un caso di scatola nera:



Il secondo principio della dinamica come esempio di conoscenza a "scatola nera".

in cui il valore m della massa del corpo è tutto ciò che occorre sapere di ciò che "è dentro la scatola", con una logica che, tutto sommato, è piuttosto comportamentistica: ipotizziamo che la relazione tra causa ed effetto sia questa, senza necessariamente sapere perché lo è.
La precedente equazione, di tipo algebrico, non fornisce in effetti alcuna informazione di tipo previsionale, dato che consente solo di concludere che, se in un certo istante si applica una certa forza, allora *in quello stesso istante* si otterrà una certa accelerazione. Ma ricordando che l'accelerazione è uguale alla derivata seconda della posizione $p(t)$:

$$a(t) = \frac{d^2 p(t)}{dt^2}$$

questa equazione può essere riscritta come:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$$

trasformandola cioè in un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, in cui la variabile di interesse, la posizione $p(t)$, compare come funzione incognita. La soluzione di un'equazione differenziale, quando è possibile, consiste nella sua *integrazione*, un'operazione che in questo caso può essere compiuta solo dopo aver stabilito la forma della funzione $F(t)$. Supponendo per esempio che la forza sia costante, $F(t)=k$, integrando due volte si ottiene:

$$p(t) = p_0 + v_0 t + \frac{k}{2m} t^2$$

avendo stabilito un *istante iniziale* t_0 tale che $p_0=p(t_0)$ e $v_0=v(t_0)$ sono dunque la posizione e la velocità in t_0 del corpo. Questa equazione costituisce un caso paradigmatico di strumento di previsione: una volta che sia assegnato, tipicamente per misurazione, un valore alle *condizioni iniziali*, p_0 e v_0, e ai *parametri*, la massa m e la forza k, consente appunto di calcolare la posizione $p(t)$ del corpo in ogni istante t.

Determinismo e previsione
E' plausibilmente questa situazione che, al di là dei dettagli formali, aveva in mente P.S.Laplace quando scriveva: «Tutti gli avvenimenti, anche quelli che per la loro piccolezza non sembrano essere dominati dalle grandi leggi della natura, ne sono una conseguenza così necessaria come le rivoluzioni del Sole. Nell'ignoranza dei legami che li uniscono all'intero sistema dell'universo, li si fa dipendere da cause finali o dal caso. Ma queste cause immaginarie sono state successivamente arretrate fino ai limiti delle nostre conoscenze, e svaniscono del tutto davanti alla sana filosofia, che non vede in esse se non l'espressione dell'ignoranza in cui siamo circa le vere cause. Un'intelligenza che per un dato istante conoscesse tutte le forze da cui la natura è animata e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse così vasta da sottoporre questi dati all'analisi, abbraccerebbe in un'unica e medesima formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli del più lieve atomo: nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi.» [P.S.Laplace, Saggio sulle probabilità, 1814]

In termini generali, questa logica di previsione prevede dunque le seguenti attività:

- *si identificano le grandezze* rilevanti per descrivere l'oggetto; alcune di queste si esprimono come variabili in funzione del tempo;
- *si identifica la relazione* che connette tali grandezze, formalizzata generalmente come equazione differenziale;
- *si risolve tale equazione*, ottenendo in questo modo l'informazione sul valore delle grandezze in un tempo qualsiasi, e quindi la previsione cercata.

Come si vedrà nel seguito, questo schema nasconde qualche problema, in particolare nei casi, per altro numerosi, in cui l'equazione differenziale non è integrabile analiticamente (cioè non è noto un metodo per ottenere la sua soluzione in forma chiusa, cioè l'espressione simbolica della funzione che rappresenta l'effetto cercato), e soprattutto quando la causa è a sua volta complessa. Se è banale integrare l'equazione differenziale che esprime il secondo principio della dinamica nel caso di forza nulla (si ottiene semplicemente il principio di inerzia galileiano) o comunque costante (come si è visto, è la situazione di moto uniformemente accelerato), tale integrazione può essere meno semplice quando $F(t)$ assume una forma più complessa, e diventa di principio impossibile quando l'evoluzione nel tempo della forza non è nota a priori.

Comportamentismo e spiegazione
La logica comportamentistica "a scatola nera" viene a volte presentata asserendo che per giungere a una previsione efficace non è necessario sapere *perché* l'oggetto ha una certa evoluzione nel tempo, ma solo *come* tale evoluzione si manifesta. Ciò non significa, naturalmente, che da eventuali risposte a domande-perché non si possano ottenere dati utili alla previsione, ma solo che, in termini generali, si riconosce che si può giungere a previsioni adeguate anche senza la conoscenza delle "ragioni sottostanti" al comportamento dell'oggetto studiato. Si può citare al proposito per esempio: «Le scienze non cercano di spiegare, a male pena tentano di interpretare, ma fanno soprattutto dei modelli. Per modello si intende un costrutto matematico che, con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali, descrive dei fenomeni osservati. La giustificazione di un costrutto matematico del genere è soltanto e precisamente che ci si aspetta che funzioni, cioè descriva correttamente i fenomeni di un'area ragionevolmente ampia. Inoltre, esso deve soddisfare certi criteri estetici, cioè in relazione con la quantità di descrizione che fornisce deve essere piuttosto semplice.» (J.Von Neumann). D'altra parte, sul ruolo della spiegazione nella scienza sono state espresse anche posizioni apparentemente assai diverse, come: «E' il desiderio di spiegazioni che siano nello stesso tempo sistematiche e controllabili dalla prova dei fatti ciò che genera la scienza.» (E.Nagel, La struttura della scienza - Problemi di logica della spiegazione scientifica, 1961). Il punto è forse che il concetto stesso di *spiegazione* presenta delle ambiguità: che struttura e ruolo hanno le domande-perché nella scienza? Qualche esempio, per porre il problema più direttamente: perché... 1. esiste un solo insieme vuoto? 2. 2+2=4? 3. tutti i numeri pari sono divisibili per due? 4. la natura obbedisce a leggi? 5. lo spazio ha tre dimensioni? 6. in ogni trasformazione termodinamica l'energia si conserva?

7. le cariche elettriche negative e positive si attraggono?
8. i mammiferi non sono ovipari?
9. la somma di due numeri dispari è sempre un numero pari?
10. il ghiaccio galleggia sull'acqua?
11. ieri mattina si è formata condensa sul vetro posteriore della mia automobile?
12. gli esseri umani hanno i polmoni?
13. gli Americani sganciarono la bomba atomica sul Giappone?
14. Cassio tramò la morte di Cesare?

Quali di queste domande ammettono una risposta, e quindi forniscono una spiegazione? E' possibile e appropriato identificare "tipi" diversi di spiegazioni?

Per sistemi ai quali si riconosce un orientamento finalistico, le domande-perché cercano di mettere in luce gli scopi:
– singolari ("perché Cassio tramò la morte di Cesare?");
– collettivi ("perché gli Americani sganciarono la bomba atomica sul Giappone?");
– evolutivi ("perché gli esseri umani hanno i polmoni?")
– ...

Ma per rispondere alla domanda "perché il ghiaccio galleggia sull'acqua?" non è necessario ipotizzare che il ghiaccio e l'acqua abbiano una volontà, o delle finalità, o degli scopi. Un esempio di spiegazione strutturalmente diversa dalle precedenti: perché il filo F si è rotto? Risposta: perché a F è stato appeso un oggetto troppo pesante. Che significa?

1. Per ogni filo F di caratteristiche date c'è un peso p tale che il filo si rompe se vi si sospende un oggetto più pesante di p.
2. Per ogni filo di tipo t il peso p è k.
3. F è un filo di tipo t.
4. E' stato sospeso a F un oggetto di peso maggiore di k.
5. Quindi F si è rotto.

La successione 1-5 è generalmente considerata una buona spiegazione alla domanda-perché citata, ed evidentemente non è basata su alcuna assunzione di tipo finalistico. Esiste dunque una seconda categoria generale di spiegazioni, dette *nomologico-deduttive*, che si basa sull'impiego di asserzioni generali ("leggi"). In questo caso si risponde a una domanda-perché, e quindi si spiega, mostrando una o più asserzioni generali da cui ciò che si vuole spiegare può essere dedotto. Ciò giustifica l'interesse della scienza a cercare leggi sempre più generali / universali.

2. La previsione per sistemi-pendoli e sistemi-nuvole

La logica di previsione introdotta finora, dunque basata sui principi di regolarità storica e di causa-effetto, si dimostra efficace in molti casi. Benché non sia certo che domani il sole sorgerà, la logica induttiva che sta alla base di questi principi consente di assegnare a tale evento una probabilità talmente alta da poterla considerare una certezza per ogni scopo pratico.

Il movimento apparente delle stelle, un esempio di regolarità.

E' una ovvia constatazione che tali principi non sono però sempre applicabili, o per lo meno non conducono sempre a risultati altrettanto certi: non tutti gli eventi che accadono manifestano la stessa, immutabile, regolarità di molti fenomeni astronomici. Alcuni eventi si ripetono effettivamente, ma con più o meno marcate variazioni (quando il cielo è nuvoloso a volte piove, ma solo a volte); altri sono troppo poco frequenti perché se ne possa osservare una qualche regolarità (accade che un edificio crolli per problemi strutturali, ma non è ovviamente possibile ripetere l'osservazione dell'evento); altri ancora manifestano effettivamente una notevole regolarità, ma siamo consapevoli che la probabilità che accadano in modo diverso non è trascurabile (una lampadina elettrica ripete numerosi cicli di accensione e spegnimento, ma prima o poi si brucia), per altri ancora, infine, l'identificazione stessa di regolarità è problematica.

I fenomeni atmosferici, un esempio di limitata regolarità.

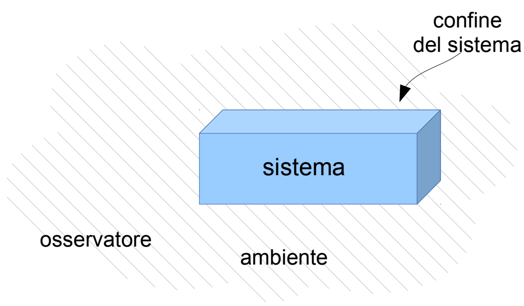
Le ragioni di questa non regolarità possono essere diverse, e non è qui importante analizzarle in dettaglio: è sufficiente notare che quando il principio di regolarità storica non è applicabile, anche quella che abbiamo chiamato “Regola di decisione” diventa inutilizzabile. Per sintetizzare la distinzione tra fenomeni ai quali il principio di regolarità storica si applica e fenomeni ai quali non si applica, K.R.Popper ha fatto riferimento metaforicamente all’opposizione *pendoli – nuvole*, alludendo con ciò al fatto che il movimento di un pendolo è ben prevedibile, a differenza dell’evoluzione temporale di una nuvola. Mantenendo questa immagine per riferirsi a eventi, fenomeni, processi, ... (in breve: “sistemi”, un termine del cui significato torneremo a occuparci) ai quali si riconosce una significativa variabilità temporale, si può concludere che la breve analisi condotta finora si applica a sistemi-pendoli ma non a sistemi-nuvole, dei quali non siamo generalmente in grado di scrivere un’equazione differenziale utile a descrivere appropriatamente l’evoluzione, e per i quali si pone dunque *il problema della previsione*. D’altra parte, la gran parte dei sistemi si colloca in un’area intermedia tra una supposta completa prevedibilità e la completa imprevedibilità: per esempio, il numero di persone in coda a uno sportello nel corso di una giornata o la quantità di merce venduta da un negozio nell’arco di una settimana in molti casi operativi possono essere previsti con una certa accuratezza, nonostante si tratti di grandezze influenzate da molteplici fattori non facilmente identificabili non precisione. E’ inoltre chiaro che un’informazione affidabile sull’evoluzione di sistemi-quasi-nuvole come quelli citati è importante per ottenere previsioni appropriate a supporto di decisioni critiche.
Naturalmente si può risolvere questo problema di previsione in molti modi, per esempio basandosi su quell’insieme di conoscenze implicite di cui ognuno dispone e che abitualmente chiamiamo “esperienza”, o anche “sensibilità personale”, “intuito”, ..., ma anche affidandosi al caso o alla magia (e un buon problema al proposito, che lasciamo indagare al lettore, è il seguente: quali sono le ragioni fondamentali per cui generalmente si considera che gli strumenti tipici della scienza e della tecnologia forniscano previsioni più efficaci di quelle ottenute con la magia?). Tutto ciò sollecita un’analisi circa le *metodologie di previsione* e la loro adeguatezza.
Fintanto che il sistema oggetto della previsione è molto semplice, non si pongono particolari problemi relativi alle metodologie di previsione; ma oltre un certo livello di complessità per poter prevedere in modo ragionevolmente efficace è praticamente necessario disporre di una descrizione appropriata dei sistema in questione. Come abbiamo visto, per essere utile alla previsione tale descrizione deve essere dinamica, cioè deve riguardare non solo la situazione attuale e istantanea dell’oggetto (la sua “fotografia”) ma anche la sua evoluzione. L’*interpretazione per sistemi* (una possibile traduzione in italiano della ben più diffusa espressione inglese *system thinking*) è finalizzata a fornire strumenti concettuali e formali per produrre descrizioni di entità (naturali, artificiali, sociali, …) la cui dinamica è complessa e quindi non consente di giungere in modo banale a previsioni / decisioni efficaci (se al contrario la previsione è semplice da ottenere, e quindi la decisione è semplice da prendere, l’interpretazione per sistemi, che si può comunque applicare, non è evidentemente di particolare utilità…). La versione formalizzata delle metodologie e degli strumenti fondati sull’interpretazione per sistemi è chiamata *Teoria Generale dei Sistemi* (in inglese *general systems theory*) o, più brevemente, *Teoria dei Sistemi*. Dunque la Teoria dei Sistemi è considerabile uno *strumento di supporto alle decisioni*, caratterizzato non per il suo dominio applicativo ma dal punto di vista dei metodi impiegati.

3. Sistemi e modelli

Il concetto di sistema è estremamente generale. La sua prima definizione dell’Oxford Dictionary, per esempio, è «*a complex whole; a set of connected things or parts; an organized body of material or immaterial things*», quindi con un riferimento esplicito all’etimologia del termine: sis-tema, dal greco “mettere insieme in modo ordinato”.

I molteplici significati di “sistema”
Dal Concise Oxford Dictionary: 1. A complex whole; a set of connected things or parts; an organized body of material or immaterial things 2. A set of devices (e.g. pulleys) functioning together 3. (Physiol.) a set of organs in the body with a common structure or function (the digestive system); the human or animal body as a whole 4. Method; considered principles of procedure or classification 5. A body of theory or practice relating to or prescribing a particular form of government, religion, etc.; (prec. by the) the prevailing political or social order, esp. regarded as oppressive and intransigent 6. A method of choosing one’s procedure in gambling etc. 7. (Computing) a group of related hardware units or programs or both, esp. when dedicated to a single application 8. (Physics) a group of associated bodies moving under mutual gravitation etc. … Etymology Gk sustema (as syn-histemi: set up)

Entro certi limiti, ogni oggetto può essere considerato e trattato come un sistema. Generalmente, trattando di sistemi si introducono in modo complementare anche i concetti di *osservatore* (o anche: decisore, se si vuole enfatizzare il suo ruolo attivo) e di *ambiente*. In prima sintesi, *sistema è ciò che può essere distinto, sulla base di qualche criterio specifico agli scopi dell’osservatore, da ciò che è considerato esterno al sistema stesso, il suo ambiente*.



Le relazioni tra sistema, ambiente, osservatore.

Alla base del punto di vista sistemico stanno dunque alcune posizioni molto generali.

- Si assume che la realtà esista “là fuori” e che abbia caratteristiche che *non dipendono* dal fatto che qualcuno la osserva, benché in particolari casi già l’osservazione possa modificare la realtà osservata (si noti che non si tratta di un’ipotesi scontata, per ragioni filosofiche e in seguito all’indeterminazione quantistica).
- In quanto osservatori costruiamo interpretazioni per “parti della realtà”: chiamiamo *modelli* tali interpretazioni, e *sistemi* tali “parti della realtà” oggetto di interpretazione. I modelli possono essere espressi in modo informale (per esempio mediante una descrizione in italiano o dei disegni); per renderli comunicabili, a esseri umani o a maggior ragione a sistemi automatici, in modo completo e non ambiguo, li si formalizza, mediante strumenti quantitativi o non.
- Ogni sistema è immerso in un ambiente: la scelta di cosa includere nel sistema e cosa nell’ambiente, e quindi di dove stabilire il confine del sistema, dipende dal modello adottato. In generale, il confine è posto sia *in ampiezza*, a separare ciò che viene escluso dal sistema perché sufficientemente “lontano” da esso, sia *in profondità*, a separare ciò che viene escluso dal sistema perché eccessivamente specifico per gli scopi per cui si opera. Ciò vale in particolare per l’osservatore, che è evidentemente egli stesso parte della realtà: il sistema può essere interpretato in modo tale da includere o meno l’osservatore.
- Ogni sistema può essere interpretato come un tutt’uno, oppure può essere riconosciuto come costituito da più *sottosistemi*, che interagiscono reciprocamente.

E’ da notare poi che il concetto di sistema è molto generale, e non pone restrizioni a priori sulla natura delle entità che possono essere considerate appunto sistemi. E così ci sono sistemi:

- fisici naturali;
- fisici artificiali;
- sociali;

- simbolici (per esempio sistemi software);
- ...

Modelli come strumenti di interpretazione
Sul concetto di modello e il suo ruolo di strumento di interpretazione, è molto interessante la seguente citazione: «Sono passate oggi molte illusioni sul modo di dare una spiegazione meccanica dell'Universo. Ora, se la fiducia di spiegare tutti i fenomeni fisici con leggi simili a quella della gravitazione universale o con un unico meccanismo è venuta a svanire, andò concretandosi, quasi a compenso di tutto questo edificio di speranze che stava crollando, l'idea dei modelli meccanici, i quali, se non soddisfano chi cerca sistemi nuovi di filosofia naturale, contentano provvisoriamente coloro che, più modesti, si appagano di ogni analogia e specialmente di ogni analogia matematica che valga a dissipare un poco le tenebre avvolgenti tanti fatti naturali. Un modello meccanico di un fenomeno è infatti un apparecchio, il quale viene architettato senza preoccuparsi se nella sua essenza abbia rapporto alcuno col fenomeno stesso; ma è costituito con la sola condizione che, quando sia posto in moto, certe sue parti si spostino o mutino seguendo le stesse leggi con cui cambiano altrettanti elementi variabili nel fenomeno: elementi che si assumono quali parametri fondamenti di esso. L'esperienza ci insegna che i modelli furono utili e servirono, come servono tuttora, a orientarci nei campi della scienza più nuovi, più oscuri e nei quali si cerca a tentoni la via». [V.Volterra, 1901, cit. in G.Israel, La visione matematica della realtà, 1996, p.7]

Con la diffusione sempre più ampia dei calcolatori, si costruiscono sempre più spesso modelli numerici, che possono essere calcolati in modo automatico, invece di modelli meccanici che per essere usati richiedono attività sperimentale (per esempio simulando a calcolatore invece che operando in una galleria del vento per ottimizzare l'aerodinamica di un profilo), ma la ragione basilare di *utilità* dei modelli rimane.

Utilità e verità
Si sostiene a volte che l'attuale enfasi sul ruolo dei modelli (ben chiarita dalla già citata considerazione di J.Von Neumann: «Le scienze non cercano di spiegare, a male pena tentano di interpretare, ma fanno soprattutto dei modelli»), e la conseguente attenzione alla loro *utilità* abbia fatto passare in secondo piano il ruolo della *verità* dei modelli stessi. Si può notare al proposito, prima di tutto, che utilità e verità sono proprietà non necessariamente dipendenti l'una dall'altra. Un'informazione / conoscenza / modello / teoria / ... può infatti essere: – utile pur non essendo vera (un esempio ormai classico è quello della meccanica newtoniana, che dall'introduzione della relatività einsteiniana è noto essere un'approssimazione di un modello "più vero", ma che non per questo si è smesso di usare nel caso di sistemi a basse velocità); – vera senza essere utile (che per esempio 123456+1 è uguale a 123457 è vero ma difficilmente utile). Utilità e verità hanno certamente una fondamentale differenza: – l'utilità è generalmente considerata una caratteristica dipendente dal soggetto (dal fatto che x sia utile per me non segue che lo sia anche per te), solitamente accertabile in modo operativo (per esempio quando si valuta un rapporto costi/benefici, il secondo termine è in pratica un'utilità); – la verità è generalmente considerata una caratteristica indipendente dal soggetto (se x è vero, lo sia per me sia per te), difficilmente accertabile in modo operativo (…). Se un modello dovesse contenere "tutta e sola la verità", per definizione nessun modello potrebbe essere vero. Come abbiamo già considerato, ogni modello è infatti costruito come un'interpretazione di un sistema, e come tale ne propone necessariamente una visione parziale: "tutta e sola la verità" su un sistema è data solo dal sistema stesso. D'altra parte, il concetto di *verità parziale* è ammissibile. Si può allora supporre che l'utilità di un modello derivi dalla constatazione che esso "funziona", e quindi in particolare fornisce previsioni efficaci, e che almeno in certi casi se un modello "funziona" è perché "è sufficientemente vero".

4. Sistemi e sistemi dinamici

Il modello di un sistema, dunque la descrizione del sistema stesso e delle sue interazioni con l'ambiente circostante, può essere, in generale:

- *statico*, nel caso in cui il modello fornisca una "fotografia" del sistema, che però non può essere impiegata esplicitamente per realizzare una previsione sull'evoluzione del sistema stesso;
- *dinamico autonomo*, nel caso in cui venga descritta l'evoluzione del sistema e si assuma l'ipotesi che tale evoluzione non dipenda da effetti dell'ambiente, e quindi in particolare dall'intervento

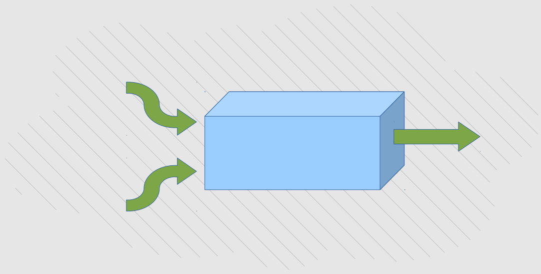
dell'osservatore;

- *dinamico aperto*, nel caso in cui venga descritta l'evoluzione del sistema e la si ammetta dipendente anche da effetti prodotti dall'ambiente.

Si dovrebbe notare che già le distinzioni statico / dinamico e autonomo / aperto non attengono, a rigore, a caratteristiche dei sistemi in quanto tali, ma dipendono da come i sistemi stessi vengono interpretati, e quindi sono, come detto, caratteristiche dei modelli dei sistemi. Nell'esempio del secondo principio della meccanica, uno stesso sistema può essere interpretato come statico, nel caso in cui lo si consideri caratterizzato dalla relazione algebrica tra forza e accelerazione, o come dinamico, nel caso in cui lo si consideri invece caratterizzato dalla relazione differenziale tra forza e posizione. Sempre per esempio, una lampadina elettrica, potrebbe essere interpretata come un sistema che produce in output luce ogni volta che viene attraversato da una corrente elettrica opportuna, e in tal caso come un sistema statico (e dunque un modello di questo genere non consente di fare alcuna previsione). Oppure, sempre per esempio, se ne potrebbe studiare l'affidabilità nel tempo, per giungere a prevedere la sua probabilità di guasto dopo un certo numero di cicli accensione-spegnimento.
In definitiva, *l'usuale terminologia "sistema x", dove x = "statico", oppure "dinamico", ... dovrebbe essere intesa come una forma abbreviata per "sistema modellizzato come x"*. Questa considerazione si applica anche, e in particolare, alla qualificazione "sistema complesso": i sistemi non sono "in sé" complessi o non-complessi. E' attraverso loro specifici modelli che li si interpreta appunto come tali.

Il ruolo di colui che modellizza: osservatore o decisore?

Nel caso più generale, si ipotizza che nel corso del tempo il sistema riceva input sia dall'ambiente sia dall'osservatore, che in questo caso è da considerare dunque un decisore attivo e non un semplice osservatore, e produca corrispondentemente degli output sull'ambiente:

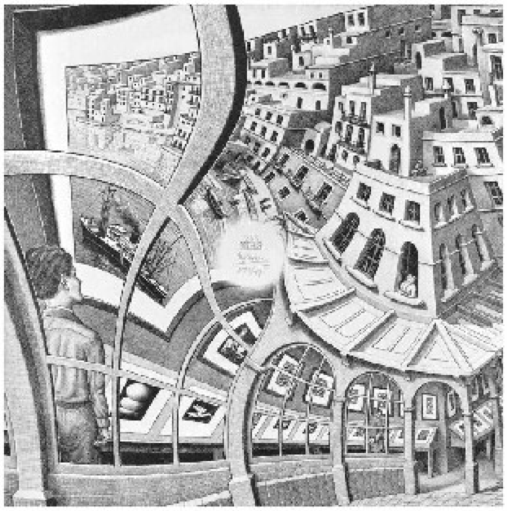


Gli input a un sistema possono giungere sia dall'ambiente esterno all'osservatore sia dall'osservatore stesso.

Un problema generale, che non approfondiremo qui, si pone proprio a proposito del ruolo dell'osservatore: è preferibile considerarlo parte (1) del sistema o (2) dell'ambiente?

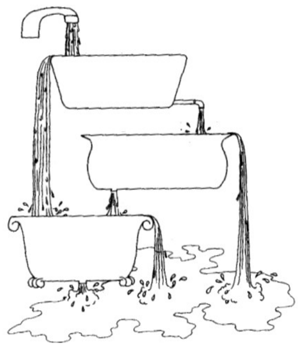
Un sistema può includere (1) o meno (2) l'osservatore.

Un'interessante allusione ai problemi connessi all'implicita ricorsività della prima opzione si trova in questa immagine, da un'opera di M.C. Escher:



5. Aggregati semplici

Per cominciare a studiare i sistemi dinamici, sviluppiamo un poco l'esempio di quello che può essere plausibilmente considerato il più semplice sistema dinamico: un *aggregato*, cioè un insieme preso in considerazione solo per una quantità caratteristica, che per esempio può consistere nella sua cardinalità, cioè nella numerosità dei suoi elementi. Sono aggregati, tra gli altri, una popolazione di individui caratterizzata solo per il numero di individui di cui è composta, o un magazzino caratterizzato solo per il numero di oggetti che contiene, o un conto bancario caratterizzato solo per l'ammontare di denaro in esso depositato.
La grandezza caratteristica dell'aggregato è formalizzabile come una funzione x del tempo, che a ogni istante t associa un valore $x(t)$. La quantità $x(t)$ può essere calcolabile in modo molto semplice, come nel caso del saldo di un conto con interessi annuali interamente depositati e senza alcun prelievo, oppure può esprimere l'andamento nel tempo di una grandezza più complessa, come la quantità di acqua che complessivamente viene versata dal sistema di vasche raffigurato:



Un aggregato moderatamente complesso
(figura da: G. M. Weinberg, D. Weinberg, General principles of systems design, 1988).

Nella formalizzazione della grandezza caratteristica x, è interessante notare che la *variabile indipendente* da cui si suppone che la grandezza stessa dipenda *è il tempo*. Ciò è tra l'altro in consonanza anche con il modo comune di intendere l'esperienza umana: se c'è una variabile su cui non abbiamo alcuna possibilità di intervenire, e quindi se c'è una variabile davvero indipendente, questa è appunto il tempo. Su tale ipotesi si basa l'attività di *simulazione*, che costituisce la versione computazionale della previsione e di cui ci occuperemo ampiamente in seguito: nel configurare una simulazione si scelgono i parametri dell'intervallo di tempo, appunto, simulato, ma nel corso della simulazione stessa il tempo rimane come la variabile indipendente da cui l'intera struttura computazionale dipende.
Cominciamo la nostra analisi prendendo in esame un aggregato particolarmente semplice: nonostante tale semplicità, ne potremo trarre varie considerazioni di un certo interesse a proposito di questioni tipiche della Teoria dei Sistemi.

5.1. Un esempio, e qualche considerazione al proposito

Ecco il caso che vogliamo studiare, descritto nella forma di un problema di previsione:

> un capitale di 1000 euro viene investito con un tasso annuale di interesse del 5%; quale sarà l'ammontare del capitale dopo 10 anni, nell'ipotesi che tutti gli interessi vengano reinvestiti e non vengano nel frattempo effettuati prelievi?

Una descrizione di questo genere è già adatta a un'analisi formale del problema. E' utile riscrivere la descrizione in questione in modo schematico, allo scopo di identificare i dati effettivamente rilevanti:

α. capitale --> descrive la natura dell'aggregato, un dato irrilevante per la previsione;

β. 1000 euro --> valore iniziale della grandezza caratteristica dell'aggregato, $x(t_0)$=1000;

γ. tasso annuale di interesse del 5% --> condizione di variazione temporale di $x(t)$;

δ. ammontare dopo 10 anni --> problema di previsione;

ε. tutti gli interessi reinvestiti, nessun prelievo --> confine del sistema.

Occorre verificare se i dati presentati nell'elenco α-ε sono:

- *completi* (oppure ne occorrono altri per giungere a una soluzione?);
- *non ambigui* (oppure l'informazione che se ne ottiene ammette interpretazioni diverse?);
- *consistenti* (oppure l'informazione che se ne ottiene è contraddittoria?).

In effetti, un dato rimane implicito nell'elenco precedente: la clausola γ indica il tasso annuale di interesse, ma non specifica la periodicità con cui gli interessi dovranno essere pagati. Per semplicità, supponiamo per ora che gli interessi vengano pagati con frequenza annuale. Non occorre dunque altro per cercare una soluzione al nostro problema.

Conosciuto come "del calcolo dell'interesse composto", questo problema ha una soluzione ben nota e che ci potrebbe portare immediatamente al calcolo dell'ammontare cercato. Non vogliamo però fare qui un esercizio di semplice applicazione di una formula, e quindi proseguiamo nel nostro ragionamento, volto a ricavare una soluzione a partire dai dati disponibili.

Abbiamo già notato (clausola β dell'elenco) che l'ammontare del capitale è la grandezza caratteristica dell'aggregato, interpretabile come una funzione dipendente dal tempo, $x=x(t)$, al cui andamento siamo dunque interessati per $t=0,1,...,n$ e in particolare per $n=10$ (clausola δ). Data l'ipotesi che gli interessi vengano pagati solo alla fine dell'anno (implicita nella clausola γ), il tempo è interpretabile come variabile in modo discreto, e quindi la funzione $x(t)$ diventa una successione $x=x_i$, $i=0, 1, ...$.

Ciò che rimane da fare è di formalizzare la dinamica del sistema per come espressa dalla clausola γ. Dato il valore iniziale della successione, $x_0=1000$, alla fine del primo anno si avrà che $x_1=x_0+0.05x_0=1.05x_0$ e quindi $x_1=1050$. Questa relazione vale in generale, e consente di calcolare il valore x_{i+1} in funzione del valore x_i:

$$x_{i+1} = x_i + kx_i$$

avendo indicato con k il valore dell'interesse annuale.

Ricordando che l'indice i è associato al tempo, la forma di questa espressione, $x_{i+1}=f(x_i)$, ne mette in evidenza il ruolo di strumento di previsione: dato x_i, cioè il valore della grandezza caratteristica al tempo i, consente di ottenere una previsione sul valore futuro x_{i+1}, secondo una logica che possiamo chiamare di *dinamica (temporalmente) locale* della grandezza caratteristica dell'aggregato, l'ammontare del capitale in questo caso.

Riscrivendo poi $x_{i+1} = x_i + kx_i$ come:

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i}=k$$

si chiarisce che k rappresenta il tasso di crescita di x_i, che in questo caso è dunque costante.

Una seconda riscrittura della stessa espressione è la seguente:

$$x_{i+1}=x_i+k\,x_i=(1+k)x_i=\bar{k}\,x_i$$

avendo definito $\bar{k}=1+k$, cosa che rende particolarmente semplice la previsione, *calcolata in forma iterativa*:

dato x_0,

$x_1=\bar{k}\,x_0$,

$x_2=\bar{k}\,x_1=\bar{k}^2 x_0$,

...

$x_n = \bar{k}^n x_0$

Quest'ultima espressione descrive quella che possiamo chiamare la *dinamica (temporalmente) globale* della grandezza caratteristica dell'aggregato: la conoscenza di un'espressione analitica per la dinamica globale del sistema consente di calcolare una previsione sull'evoluzione del sistema senza dover iterare la soluzione locale.

> ✔ Si implementino in un foglio di calcolo le formule che descrivono la dinamica locale e la dinamica globale del sistema, verificando che, per ogni x_i, forniscono gli stessi risultati.

La conoscenza della dinamica globale per il sistema:

$x_n = \bar{k}^n x_0$

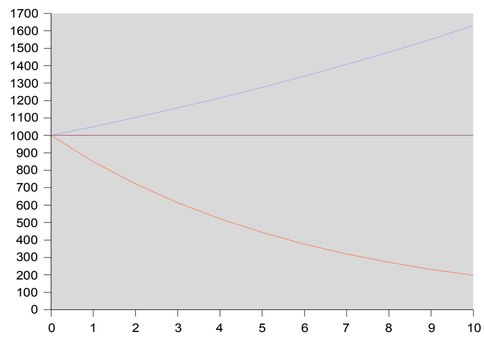
consente di analizzare l'evoluzione del sistema al variare del parametro $\bar{k}$, naturalmente nell'ipotesi che $x_0 > 0$.

I casi possibili sono tre:

- $\bar{k} > 1$ (cioè $k > 0$): $x(t)$ diverge esponenzialmente;
- $\bar{k} = 1$ (cioè $k = 0$): $x(t)$ si mantiene costante;
- $\bar{k} < 1$ (cioè $k < 0$): $x(t)$ converge esponenzialmente a 0.

Queste tre possibilità sono mostrate nell'esempio che segue, con il grafico che mostra l'andamento del valore della funzione $x(t)$, in ordinata, al variare del tempo t, in ascissa.

	Indice	Dinamica per K1	K2	K3
X0	0	1000	1000	1000
1000	1	1050	1000	850
	2	1102.5	1000	722.5
K1	3	1157.63	1000	614.13
0.05	4	1215.51	1000	522.01
	5	1276.28	1000	443.71
K2	6	1340.1	1000	377.15
0	7	1407.1	1000	320.58
	8	1477.46	1000	272.49
K3	9	1551.33	1000	231.62
-0.15	10	1628.89	1000	196.87



La dinamica del sistema in esame, con tasso di interesse positivo, nullo e negativo.

> ✔ Quale andamento nel tempo ha la grandezza caratteristica di un aggregato tale che $\bar{k} = -1$?

> ✔ Un parametro considerato rilevante per caratterizzare un aggregato è il tempo necessario perché la sua quantità caratteristica raddoppi, cioè il valore $\bar{t}$ tale che $x(\bar{t}) = 2x(0)$ (o si dimezzi, nel caso di andamento decrescente, cioè il valore $\bar{t}$ tale che $x(\bar{t}) = x(0)/2$).
> Si dimostri che nel caso dell'esempio trattato $\bar{t} = \log(2)/\log(\bar{k})$.

Siamo dunque in grado di descrivere l'evoluzione del sistema che stiamo studiando in due modi complementari:

- mediante la sua dinamica locale $x_{i+1} = \bar{k}\, x_i$, opportunamente iterata;
- mediante la sua dinamica globale $x_n = \bar{k}^n x_0$.

Nell'esempio che stiamo studiando, i due modi portano a soluzioni identiche, e la soluzione globale è evidentemente più efficiente da un punto di vista computazionale. La relazione tra dinamica locale e dinamica globale è però in generale più complessa di quanto appaia da questo esempio. Riprenderemo perciò nel seguito l'argomento, analizzandolo in maggiore dettaglio. Per ora, accontentiamoci di mettere in evidenza almeno una ragione che potrebbe portare a preferire una descrizione locale rispetto a una globale.

Ricordando la rappresentazione generale che abbiamo dato di un sistema come "scatola nera":

Sistemi come “scatole nere”.

possiamo notare immediatamente che il modello su cui stiamo lavorando non prevede alcun input al sistema. Certo, la dinamica del sistema dipende dal valore iniziale x_0 e dal tasso di crescita k, ma entrambi sono stati ipotizzati costanti nel tempo, e quindi sono più propriamente interpretabili come parametri del sistema piuttosto che come suoi input. Come abbiamo già visto, un modello con queste caratteristiche, che descrive dunque la dinamica di un sistema eventualmente in dipendenza da parametri ma non da input che siano funzione del tempo, si dice *autonomo*, per mettere in evidenza che si suppone l'evoluzione del sistema indipendente dalla possibilità di un intervento esterno al sistema stesso.
Una versione non-autonoma del sistema si ottiene per esempio assumendo che il tasso di crescita possa variare nel corso del tempo, e quindi che $k=k(t)$. In questo caso tale valore costituisce effettivamente un input al sistema, che non è più autonomo dato che la sua evoluzione risulta controllabile proprio attraverso la funzione k. Indicando dunque con k_i il valore del tasso all'anno i, l'espressione della dinamica locale del sistema non cambia sostanzialmente:

$$x_{i+1}=x_i+k_i x_i$$

e nel suo calcolo iterato è solo necessario in ogni anno conoscere il tasso stabilito per quell'anno. Più complesso diventa invece effettuare una previsione a partire dal calcolo della dinamica globale del sistema, la cui espressione (indicando ancora $\bar{k}_i=1+k_i$) è:

t_0: x_0

t_1: $x_1=\bar{k}_0 x_0$

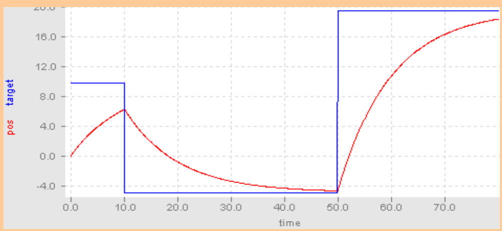
t_2: $x_2=\bar{k}_1 x_1=\bar{k}_0 \bar{k}_1 x_0$

...

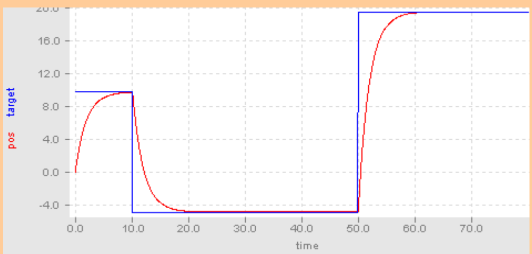
t_n: $x_n=\prod_{i=0}^{n-1} \bar{k}_i x_0$

Solo per successioni $\bar{k}_i$ particolarmente semplici il prodotto $\prod \bar{k}_i$ è calcolabile senza dover ricorrere a una procedura iterativa: l'unico modo per ottenere la dinamica globale di un sistema potrebbe essere attraverso l'iterazione della sua dinamica locale.

✔ Modellizzare una popolazione il valore della cui variabile caratteristica $x(t)$ insegue un valore di riferimento $y(t)$ con un fattore di ritardo / inerzia, dunque con un comportamento del tipo:



in un caso di inerzia (relativamente) elevata, e:



in un caso di inerzia minore.

Si tratta dunque di assumere $y(t)$ come variabile "target" e di definire una variabile $x(t)$ che "insegue" $y(t)$. L'equazione che descrive $x(t)$ in funzione di $y(t)$ e di un coefficiente di inerzia (che supponiamo costante) k potrebbe essere:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\frac{y(t)-x(t)}{k}\Delta t$$

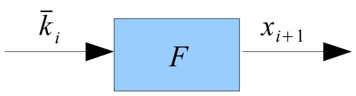
Un modello alternativo, dipendente non più da un parametro di inerzia ma da un tasso di crescita, è:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+kx(t)(1-\frac{x(t)}{y(t)})\Delta t$$

Non è comunque difficile trovare altre soluzioni al problema.

6. Linearità

Possiamo dunque rappresentare il sistema che stiamo studiando in questo modo:



Il sistema in esame come "scatola nera".

Il tasso $\bar{k}_i$ all'anno i determina l'ammontare del capitale x_{i+1} all'anno successivo, attraverso una trasformazione F (che tiene in considerazione anche l'ammontare del capitale x_i dell'anno corrente: della natura di questa dipendenza tratteremo successivamente) che ha la forma:

$$x_{i+1}=F[\bar{k}_i]$$

F è un *operatore funzionale*, che trasforma una funzione in input in una funzione in output (come si è notato in precedenza, in questo caso le due funzioni hanno come dominio i numeri naturali e quindi sono espresse nella forma di successioni). Una proprietà importante che può avere un operatore è la *linearità*, definita dalla seguente condizione:

sia F un operatore funzionale che applicato alle funzioni di input $in_i(t)$ produce le funzioni di output $out_i(t)=F[in_i(t)]$; se applicando a F una funzione di input del tipo $in(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i in_i(t)$, con c_i costanti, la funzione di output prodotta è $F[in(t)]=\sum_{i=1}^{n} c_i out_i(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i F[in_i(t)]$, allora F si dice **lineare**.

L'importanza della linearità dell'operatore che formalizza la trasformazione che un sistema compie si chiarisce ricordando che la funzione di input è interpretabile come la *causa* che produce l'effetto corrispondente alla funzione di output. La funzione di input:

$$in(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i in_i(t)$$

corrisponde perciò a una causa ottenuta dalla sovrapposizione di cause molteplici. Se F è lineare, l'effetto che si ottiene applicando ad esso $in(t)$, cioè una sovrapposizione di cause, è uguale alla sovrapposizione degli effetti corrispondenti alle singole cause. Qualora tale *principio di sovrapposizione degli effetti* sia effettivamente valido, perché dunque F è lineare, di fronte a un input complesso, perché costituito da più componenti sovrapposte, è possibile studiare separatamente gli effetti che le singole componenti producono e quindi, appunto, ottenere l'effetto complessivo come sovrapposizione di tali effetti singoli. Si tratta dunque di una condizione di notevole semplificazione nella descrizione della dinamica di un sistema.

✔ Si verifichi quali dei seguenti operatori funzionali:

$$F[x(t)]=\frac{dx(t)}{dt}$$
$$F[x(t)]=e^{x(t)}$$
$$F[x(t)]=\sin(x(t))$$

$F[x(t)]=[x(t)]^2$
sono lineari.

Un'ulteriore conseguenza della linearità di F è la proporzionalità tra cause *in*(t) ed effetti $F[in(t)]$: in un sistema lineare, se, per esempio, *in*(t) raddoppia allora anche $F[in(t)]$ raddoppierà. Si tratta di una caratteristica di cui evidentemente gode il sistema che stiamo studiando: è facile mostrare la linearità dell'operatore $x_{i+1}=F[\bar{k}_i]=\bar{k}_i x_i$.

7. Tempo discreto, tempo continuo

Modifichiamo parzialmente, generalizzandolo, il problema che stiamo studiando: ipotizziamo che il tasso di interesse annuale rimanga pari a k (e per semplicità supponiamo che tale valore si mantenga costante nel tempo), ma venga pagato con maggior frequenza, per esempio ogni trimestre. Come deve essere modificata la formula precedente in questo caso?
Ogni anno il capitale verrà ricalcolato 4 volte, ogni volta con un tasso di interesse pari a $k/4$. Per conoscere il capitale dopo 10 anni dovremo perciò iterare 40 volte il calcolo della funzione. In queste condizioni, allo scopo di mantenere l'anno come unità di tempo occorre introdurre esplicitamente il termine Δt che identifica l'intervallo di ricalcolo (che era stato mantenuto implicito nell'ipotesi $\Delta t=1$, mentre ora $\Delta t=0.25$), e con ciò distinguere tra l'indice della successione, che ora varia tra 0 e 40, e il tempo, che ancora varia tra 0 e 10 ma per passi ridotti, $t=0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, 10$.

indice	tempo
0	0
1	Δt
2	$2\Delta t$
...	...
40	10

La dinamica locale del sistema diventa allora:

$$x_{i+1}=x_i+(k\Delta t)x_i=(1+k\Delta t)x_i$$

da cui si ottiene la dinamica globale:

$$x_n=(1+k\Delta t)^n x_0$$

		Dinamica con ricalcolo			
	Indice	Annuale	Trimestrale	Giornaliero	Istantaneo
X0	0	1000	1000	1000	1000
1000	1	1050	1050.95	1051.27	1051.27
	2	1102.5	1104.49	1105.16	1105.17
K	3	1157.63	1160.75	1161.82	1161.83
0.05	4	1215.51	1219.89	1221.39	1221.4
	5	1276.28	1282.04	1284	1284.03
Δt	6	1340.1	1347.35	1349.83	1349.86
1	7	1407.1	1415.99	1419.03	1419.07
	8	1477.46	1488.13	1491.78	1491.82
Δt	9	1551.33	1563.94	1568.26	1568.31
0.25	10	**1628.89**	**1643.62**	**1648.66**	**1648.72**
Δt					
0.00274					

La dinamica del sistema in esame, con interessi pagati con frequenza annuale, trimestrale, giornaliera, istantanea.

Per quanto con una variazione quantitativa limitata, il capitale cresce più rapidamente, a parità di tasso di interesse, con l'intensificarsi dei pagamenti degli interessi, fino a tendere a un valore massimo che si otterrebbe nel caso di ricalcolo a tempo continuo. A questo proposito, riscriviamo l'espressione della dinamica locale in forma funzionale:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+(k\Delta t)x(t)$$

e quindi:

$$x(t+\Delta t)-x(t)=(k\Delta t)x(t)$$

e infine:

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=k\,x(t)$$

Il termine a sinistra di questa espressione è evidentemente il rapporto incrementale della funzione $x(t)$. Al limite per $\Delta t \to 0$, cosa che corrisponderebbe alla situazione in cui in ogni istante gli interessi venissero calcolati e accumulati al capitale, si ottiene:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k\,x(t)$$

Questo modo di procedere è generalizzabile: fintanto che la logica di passaggio al limite è ammissibile, cioè fintanto che è accettabile ipotizzare che il processo si attui nel continuo, la derivata della funzione $x(t)$ *fornisce l'informazione sulla dinamica locale* del sistema.
Nel nostro caso, della semplice equazione differenziale:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k\,x(t)$$

è nota la funzione integrale:

$$x(t) = x(t_0)\,e^{k(t-t_0)}$$

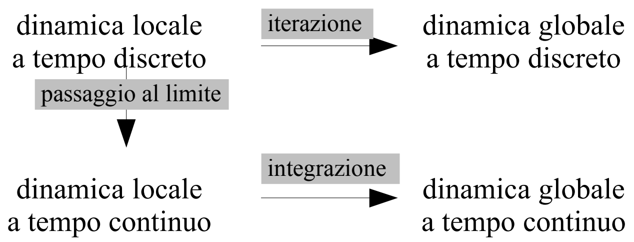
che è facilmente calcolabile e che può essere dunque impiegata al posto di:

$$x_n = (1 + k\,\Delta t)^n x_0$$

se si considera accettabile l'ipotesi di ricalcolo a tempo continuo per il capitale, e che dunque *fornisce l'informazione sulla dinamica globale* del sistema.
In sintesi, siamo giunti a formulare quattro diverse descrizioni della dinamica del sistema che stiamo studiando:

	dinamica locale	dinamica globale
a tempo discreto	$x_{i+1} = (1 + k\,\Delta t)\,x_i$	$x_n = (1 + k\,\Delta t)^n x_0$
a tempo continuo	$\frac{dx(t)}{dt} = k\,x(t)$	$x(t) = x(t_0)\,e^{k(t-t_0)}$

Le relazioni che da un punto di vista operativo connettono reciprocamente queste descrizioni sono:



Da Galileo e Newton in poi, le scienze fisiche hanno cercato sistematicamente di formalizzare la conoscenza a cui giungevano mediante equazioni di dinamica locale a tempo continuo. Ne è un semplice esempio il già citato secondo principio della meccanica:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$$

In assenza di strumenti per il calcolo automatico, equazioni di questo genere non sono facilmente impiegabili per la previsione, e risulta quindi necessario integrarle, cioè trovarne una soluzione che corrisponda appunto a un'equazione di dinamica globale a tempo continuo. Nel caso della precedente equazione, supponendo per esempio che $F(t)=k$, come si assume abitualmente per descrivere il moto in caduta libera dovuto alla forza di gravità F che si ipotizza appunto costante, l'integrazione di:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} = \frac{k}{m} = g$$

porta facilmente a:

$$p(t) = p_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g\,t^2$$

evidentemente un'equazione di dinamica globale a tempo continuo. Ciò spiega la grande attenzione che gli studiosi di analisi matematica hanno rivolto all'identificazione di metodi analitici per l'integrazione delle equazioni differenziali. Con la diffusione dei calcolatori elettronici, la capacità di calcolo ha perso progressivamente la sua tradizionale caratteristica di risorsa critica (perché scarsa e scarsamente capace di garantire la correttezza dei risultati nel caso di conti molto lunghi da svolgere), con la conseguenza che oggi non pone generalmente problemi la condizione di operare numericamente per iterare equazioni di dinamica locale a tempo discreto. E' questa la logica generale alla base dei processi di simulazione.

8. Corrispondenze strutturali e formalizzazione

Dopo aver analizzato con un certo dettaglio la dinamica di un capitale a interesse composto, consideriamo ora un problema di previsione per un secondo sistema, descritto come segue:

> una popolazione di 1000 individui cresce del 5% all'anno; quale sarà il numero di individui della popolazione dopo 10 anni, nell'ipotesi che nessun individuo lasci nel frattempo la popolazione?

Tornando alla schematizzazione che avevamo fatto del sistema studiato finora, confrontiamola con quella che possiamo facilmente ricavare per questo nuovo sistema:

		Sistema 1	*Sistema 2*
α	natura dell'aggregato	capitale	popolazione
β	valore iniziale $x(t_0)$ della grandezza caratteristica	1000 euro	1000 individui
γ	condizione di variazione temporale di $x(t)$	tasso annuale di interesse del 5%	tasso annuale di crescita del 5%
δ	problema di previsione	ammontare dopo 10 anni	numero di individui 10 unità di tempo
ε	confine del sistema	tutti gli interessi reinvestiti, nessun prelievo	tutti gli individui rimangono nella popolazione

Questa presentazione mette in evidenza la *corrispondenza strutturale*, e più formalmente l'isomorfismo, dei due sistemi, con la conseguenza che tutte le conclusioni a cui siamo giunti operando formalmente sui dati relativi al primo sistema sono immediatamente riapplicabili al secondo sistema, semplicemente cambiando la semantica dei dati. E così, per esempio, in un caso diremo che il conto alla fine del primo anno contiene un capitale di 1050 euro, nell'altro che la popolazione alla fine del primo anno è costituita da 1050 individui.

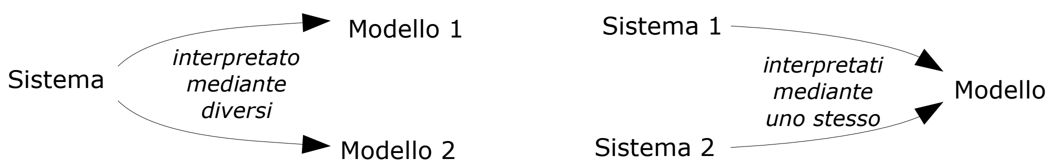
Il fatto di essere riusciti a *formalizzare il problema di previsione* ci ha consentito di applicarne i risultati a sistemi la cui natura è profondamente diversa, e che sono accomunati appunto solo dalla loro struttura. Questa considerazione è del tutto generale, e mette in evidenza le complesse *relazioni che intercorrono tra sistemi e modelli*:

- di uno stesso sistema possono essere costruiti modelli diversi, distinti per finalità, grado di dettaglio, ...;

e d'altra parte:

- uno stesso modello può fornire un'interpretazione per sistemi diversi.

Quella tra sistemi e modelli è perciò una relazione molti-a-molti:



La relazione molti-a-molti tra sistemi e modelli.

In conseguenza, l'interesse della teoria / analisi / progettazione dei sistemi si rivolge non tanto alla specifica natura degli elementi di cui i sistemi sono costituiti, quanto piuttosto alle caratteristiche strutturali dei sistemi stessi.

L'oggetto della Teoria Generale dei Sistemi
Secondo L.von Bertalanffy, considerato uno dei padri fondatori della Teoria Generale dei Sistemi, tale teoria studia:

«i "sistemi" in generale, quale che sia la natura degli elementi che li compongono e delle relazioni operanti tra essi. (…) Nei confronti delle scienze vertenti su "complessi organizzati" essa avrebbe un significato analogo a quello assunto dalla teoria delle probabilità nei confronti di quelle scienze che vertono su eventi casuali».
[L.von Bertalanffy, Teoria generale dei sistemi, trad.it. 1983, p.72]

Questa enfasi sulla struttura degli oggetti si riflette nel significato che viene attribuito al concetto di sistema in ambito tecnico. Ecco alcune significative citazioni al proposito:

"Un sistema è una totalità organizzata, composta di elementi solidali che possono essere definiti soltanto gli uni in rapporto gli altri, in funzione della loro collocazione in questa totalità" (Saussure, 1922).

"Un sistema è un insieme di unità in reciproca interazione" (von Bertalanffy, 1956).

"Un sistema è un tutto che funziona come tutto sulla base degli elementi che lo costituiscono" (Rapoport, 1968).

"Un sistema è l'unità che risulta dalle parti in reciproca alterazione" (Ackoff, 1971).

"Un sistema è una unità globale organizzata di interrelazioni fra elementi, azioni, individui" (Morin, 1977).

Prevalente, per quanto non esclusiva, in questa rassegna di significati è l'idea di *sistema come collezione organizzata di parti interagenti*.

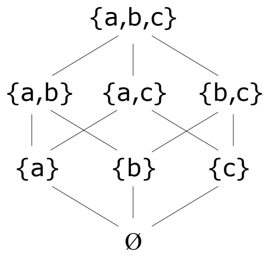
Sistemi come collezioni organizzate

Ancora von Bertalanffy ha così analizzato le peculiarità delle "collezioni organizzate":
«La fisica classica ha ottenuto grandi successi nello sviluppare la teoria della complessità non organizzata. Così, per esempio, il comportamento di un gas è il risultato dei movimenti, non organizzati e non osservabili individualmente, di innumerevoli molecole; il gas, complessivamente considerato, segue le leggi della termodinamica. In ultima istanza, la teoria della complessità non organizzata ha le proprie origini nelle leggi del caso e delle probabilità, e nella seconda legge della termodinamica. Al contrario, il problema che è oggi di importanza fondamentale è quello della complessità organizzata. Concetti come quello di organizzazione, di totalità, di tendenza direzionale, di teleologia e di differenziazione sono estranei alla fisica tradizionale. Essi tuttavia balzano fuori a ogni piè sospinto nelle scienze biologiche, comportamentiste e sociali, e sono, in realtà, indispensabili per trattare gli organismi viventi o i gruppi sociali. Pertanto un problema fondamentale che si pone di fronte alla scienza moderna è quello di una teoria generale dell'organizzazione».
[L.von Bertalanffy, Teoria generale dei sistemi, trad.it. 1983, p.68]

8.1. Differenze semantiche, identità formali: due esempi sul concetto di struttura

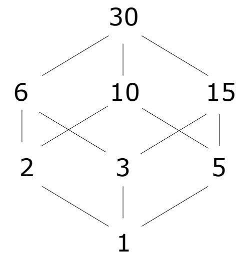
Per mostrare che il concetto di struttura, che caratterizza dunque il punto di vista sistemico, *attiene al processo di formalizzazione*, e perciò non richiede necessariamente la presenza di componenti quantitative, proponiamo brevemente due esempi in cui di sistemi diversi viene individuata una stessa formalizzazione non quantitativa e, per semplicità, nemmeno dinamica.
Presentiamo il primo esempio mediante i seguenti due diagrammi:

Sistema 1: sottoinsiemi considerati
nella loro relazione di inclusione



Un segmento unisce due elementi
se tra questi vale la relazione di inclusione:
l'insieme soprastante include quello sottostante

Sistema 2: numeri naturali considerati
nella loro relazione di divisibilità



Un segmento unisce due elementi
se tra questi vale la relazione di divisore:
il numero soprastante è divisore di quello sottostante

✔ Date le loro evidenti analogie, quali sono le differenze principali tra questi due sistemi?
Un teorema valido in un caso, sarebbe valido anche nell'altro? sotto quali condizioni?

Il secondo esempio è un classico della logica formale.
Supponiamo che sia vero che chiunque ama è felice, e osserviamo che Alberto ama Barbara: ne potremo concludere che Alberto è felice (in breve: se chiunque ama è felice e Alberto ama Barbara, allora Alberto è felice).
Infatti, se scriviamo, in simboli:

$P(x)$: x ama (qualcuno)

$Q(x)$: x è felice

allora la "legge" "chiunque ama è felice" si può scrivere:

$\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$: per ogni x, se x ama qualcuno allora x è felice

Ma sappiamo che Alberto effettivamente ama qualcuno, cioè nel caso di Alberto (scriviamo in simboli A) è vero che $P(A)$. Allora si applica il sillogismo (chiamato *modus ponens*):

$$\frac{\forall x, P(x) \rightarrow Q(x) \quad P(A)}{Q(A)}$$

e quindi ne possiamo concludere, formalmente, che Alberto è felice.
Prendiamo in esame ora un secondo problema: supponiamo di sapere che i predatori hanno denti aguzzi e che i lupi predano le pecore; cosa ne possiamo concludere?
Anche in questo caso, adottiamo la strategia di formalizzare la conoscenza disponibile. Scriviamo:

$P(x)$: x è un predatore (di qualche animale)

$Q(x)$: x ha i denti aguzzi

così che la "legge" "i predatori hanno denti aguzzi" diventa:

$\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$: per ogni x, se x è un predatore allora x ha i denti aguzzi

Come nel caso precedente, applichiamo tale "legge" al fatto che conosciamo, i lupi sono predatori, $P(A)$, avendo indicato i lupi con il simbolo A. Ma allora è applicabile anche il sillogismo:

$$\frac{\forall x, P(x) \rightarrow Q(x) \quad P(A)}{Q(A)}$$

Dunque se i predatori hanno denti aguzzi e i lupi predano le pecore, allora i lupi hanno denti aguzzi.

Sistemi e isomorfismi

Otteniamo una sintesi di questi esempi tornando a trattare di sistemi dinamici, ancora con le parole di von Bertalanffy:
«Si hanno delle corrispondenze tra i principi che governano il comportamento di entità che sono, intrinsecamente, molto diverse tra loro. Per esempio, una legge esponenziale di crescita si applica a certe cellule batteriche, a popolazioni di animali e di uomini, ai progressi della ricerca scientifica misurati mediante il numero delle pubblicazioni. Le entità in questione, quali i batteri, gli animali, gli uomini, i

libri, … sono completamente differenti le une rispetto alle altre, e questo vale anche per i meccanismi causali implicati. Ciò nondimeno, la legge matematica è la stessa. Oppure ci sono dei sistemi di equazioni che descrivono la competizione tra specie vegetali ed animali in natura. Ma risulta che gli stessi sistemi di equazioni sono altrettanto bene applicabili in certi campi della chimica-fisica e dell'economia».
[L.von Bertalanffy, Teoria generale dei sistemi, trad.it. 1983]

9. Aggregati complessi

Per avvicinarci a problemi un poco più interessanti, perché più complessi, di quelli che abbiamo studiato finora, riprendiamo in esame quella particolare categoria di sistemi che abbiamo chiamato "aggregati", e ipotizziamo per prima cosa che la dinamica dell'aggregato in considerazione sia determinata contemporaneamente da due fattori contrapposti, uno che incrementa il valore attuale della grandezza $x(t)$ e uno che invece lo riduce. Per evitare un'analisi eccessivamente astratta del tema, scegliamo un particolare sistema da modellizzare, per esempio una popolazione di individui la cui numerosità è la grandezza caratteristica. Ipotizzando che i due fattori di variazione operino sul sistema in modo lineare, la dinamica locale del sistema può essere espressa, a tempo discreto, come:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+[k_1 x(t)-k_2 x(t)]\Delta t$$

dove k_1 e k_2 sono due costanti positive che rappresentano rispettivamente i tassi di incremento e decremento della popolazione nell'unità di tempo. Dunque $k_1 x(t)$ e $k_2 x(t)$ sono il numero di individui che "entrano" nella popolazione e il numero di quello che "escono" da essa nel periodo tra t e $t+\Delta t$. Si noti che questa formalizzazione prescinde, ancora una volta, dalle ragioni di questa dinamica: la popolazione potrebbe incrementarsi per la nascita di nuovi individui o per l'immigrazione di individui dall'ambiente esterno, e analogamente potrebbe ridursi per la morte di individui o per l'emigrazione di individui verso l'ambiente esterno. E' poi evidente dalla precedente espressione che ciò determina la dinamica locale del sistema è in effetti solo il *tasso effettivo* $k=[k_1-k_2]\Delta t$, o anche $\bar{k}=1+[k_1-k_2]\Delta t$, tale che:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+k\,x(t)\Delta t=\bar{k}\,x(t)$$

Una volta accettata l'ipotesi di linearità, dunque, per la soluzione del problema di previsione rimane rilevante il solo parametro $\bar{k}$. Una causa più rilevante di complessità deriva dal fatto di prendere in esame aggregati costituiti da due o più *sotto-aggregati in interazione reciproca*, ognuno di essi caratterizzato dalla sua numerosità $x(t)$.

Per espressività chiameremo "popolazioni" tali sotto-aggregati e per semplicità tratteremo solo il caso di coppie di popolazioni, *A* e *B*, interagenti, per esempio popolazioni di individui, giovani (*A*) e adulti (*B*), dunque caratterizzate dalle funzioni $x_A(t)$ e $x_B(t)$ rispettivamente.

Continuiamo a supporre che la dinamica propria di ogni popolazione sia a tempo discreto (per semplicità con $\Delta t=1$) e lineare, con tasso di variazione $\bar{k}$ costante nel tempo, e quindi, come abbiamo appena discusso, sia localmente descritta nella forma semplificata $x(t+1)=\bar{k}\,x(t)$. Ugualmente lineare è la formalizzazione con cui vogliamo esprimere l'interazione tra popolazioni.

✔ Si individuino alcune possibili cause di interazione tra popolazioni, e se ne ipotizzino delle modalità di formalizzazione in modo che la relativa dinamica sia lineare.

Le interazioni tra le popolazioni che abbiamo assunto ad esempio sono, strutturalmente, due, e rappresentano:

- l'influenza che la popolazione *A* ha sulla popolazione *B*, dovuta per esempio all'effetto di maturazione dei giovani, che in una certa frazione $k_{B,A}$ (che si può dunque leggere come $k_{B\leftarrow A}$) del loro numero totale a ogni unità di tempo diventano adulti ed entrano quindi nella popolazione *B*;
- l'influenza che la popolazione *B* ha sulla popolazione *A*, dovuta per esempio all'effetto di generazione di nuovi giovani da parte degli individui adulti, che in una certa frazione $k_{A,B}$ del loro numero totale a ogni unità di tempo generano individui che entrano nella popolazione *A*.

L'ipotesi di linearità che abbiamo assunto implica allora che il numero di giovani che al tempo *t* maturano e il numero di nuovi nati, sempre al tempo *t*, siano pari rispettivamente a $k_{B,A}x_A(t)$ e $k_{A,B}x_B(t)$, essendo $x_A(t)$ e $x_B(t)$ il numero di individui rispettivamente giovani e adulti al tempo *t*. Un esempio numerico può forse chiarire ancor meglio la questione:

- $x_A(t=0)=10$, $x_B(t=0)=20$ (cioè: al tempo 0 l'aggregato contiene 10 individui giovani e 20 individui adulti);

- $k_{B,A}=0.2$ (cioè: in ogni unità di tempo, il 20% degli individui giovani matura);
- $k_{A,B}=0.3$ (cioè: in ogni unità di tempo, il 30% degli individui adulti genera un individuo giovane).

Per calcolare la dinamica delle due popolazioni ci è necessario, infine, conoscere i loro tassi di crescita propri, che, per omogeneità con la notazione appena introdotta, indichiamo con $k_{A,A}$ e $k_{B,B}$, dunque come fossero delle "auto-interazioni". Supponiamo per esempio:

- $k_{A,A}=0.8$ (cioè: in ogni unità di tempo, l'80% degli individui giovani rimane tale; dato che avevamo ipotizzato un tasso di maturazione del 20%, assumiamo perciò che nessun individuo giovane lasci la popolazione per l'ambiente esterno, emigrando o morendo);
- $k_{B,B}=0.6$ (cioè: in ogni unità di tempo, il 60% degli individui adulti rimane tale; il restante 40% esce invece dal sistema, emigrando o morendo).

Un inciso: si noti che questa formalizzazione è sufficientemente astratta da ammettere anche un'interpretazione alternativa: dei 40 individui adulti su 100 che in ogni unità di tempo escono dalla loro popolazione, solo 10 effettivamente escono dal sistema, emigrando o morendo: gli altri 30 sono proprio quelli che in quell'unità di tempo vengono generati (e quindi reincarnati? oppure sono individui ringiovaniti? Lasciamo al lettore la decisione...). Il punto è che, come abbiamo già sottolineato, un aggregato è dinamicamente caratterizzato *solo* dalla grandezza $x(t)$, con la conseguenza che gli individui di cui stiamo parlando hanno un ruolo esclusivamente semantico (e infatti non è difficile re-interpretare l'aggregato di cui stiamo trattando per esempio come se si trattasse di un capitale a interesse composto: in tal caso sarebbe chiaro che non ci sono individui "interni" al sistema): modellizzando un sistema come un aggregato, o un insieme di sotto-aggregati interagenti, gli unici individui che propriamente intervengono nella formalizzazione sono gli aggregati stessi.

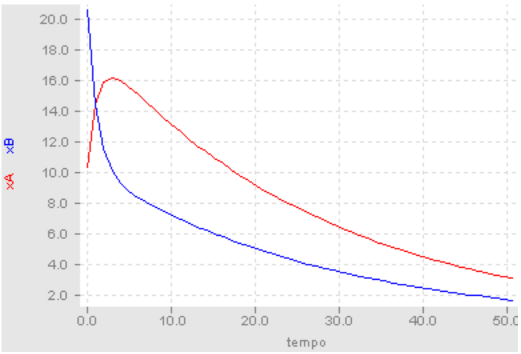
Tornando al nostro esempio numerico, vale dunque che:

- $x_A(t+1)=k_{A,A}x_A(t)+k_{A,B}x_B(t)$ (cioè: in ogni istante, il numero degli individui giovani è pari al numero di coloro che erano giovani e rimangono tali incrementato del numero dei neo-nati;
- $x_B(t+1)=k_{B,B}x_B(t)+k_{B,A}x_A(t)$ (cioè: in ogni istante, il numero degli individui adulti è pari al numero di coloro che erano adulti e rimangono tali incrementato del numero dei giovani maturati.

E quindi, in particolare:

- $x_A(t=1)=0.8\times10+0.3\times20=14$;
- $x_B(t=1)=0.6\times20+0.2\times10=14$.

Iterando il calcolo, non è difficile (ma solo noioso, senza il supporto di uno strumento di calcolo automatico) scoprire che la dinamica del sistema, benché lineare in ognuna delle sue componenti, è sufficientemente complessa:



L'evoluzione nel tempo del sistema in esame, costituito da due sotto-aggregati interagenti, ognuno a dinamica lineare.

✔ Si implementi in un foglio elettronico il calcolo per la previsione dell'evoluzione del sistema in esame, verificando che i risultati ottenuti corrispondano a quelli sopra visualizzati. Si studino quindi le variazioni che si ottengono sull'andamento delle due curve $x_A(t)$ e $x_B(t)$ al variare dei parametri $k_{i,j}$.

Un'analisi anche solo puramente strutturale, dunque indipendente dal fatto che si considerino popolazioni di esseri umani o di batteri, conti bancari, quote di mercato di aziende, ... evidenzia la possibilità di categorizzare per tipologie generali l'interazione tra le popolazioni stesse:

- se entrambi i parametri $k_{A,B}$ e $k_{B,A}$ sono nulli, non c'è interazione;
- se entrambi i parametri $k_{A,B}$ e $k_{B,A}$ sono positivi, e quindi la presenza di una popolazione incrementa l'altra, l'interazione è di tipo *cooperativo*;

- se entrambi i parametri $k_{A,B}$ e $k_{B,A}$ sono negativi, e quindi la presenza di una popolazione decrementa l'altra, l'interazione è di tipo *competitivo*;
- se i parametri $k_{A,B}$ e $k_{B,A}$ hanno segno opposto, e quindi una popolazione sfrutta l'altra, l'interazione è di tipo *parassitario*.

10. Aggregati complessi /2

Introducendo la notazione matriciale, è possibile formalizzare problemi di previsione, come quello che abbiamo appena analizzato, in modo contemporaneamente sintetico ed espressivo, oltre che elegante. L'insieme dei parametri $k_{i,j}$ può essere appropriatamente organizzato nella matrice $\boldsymbol{K}=[k_{i,j}]$, che nel caso del nostro esempio è dunque:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{A,A} & k_{A,B} \\ k_{B,A} & k_{B,B} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Se poi si mette nella forma di vettore colonna la grandezza caratteristica dell'aggregato, $\boldsymbol{X}(t)=[x_A(t) \;\; x_B(t)]^T$ (ricordiamo che si indica in questo modo l'operazione di trasposizione:

$$[x_A(t) \;\; x_B(t)]^T=\begin{bmatrix} x_A(t) \\ x_B(t) \end{bmatrix}$$

che scambia righe e colonne di una matrice), il sistema di due equazioni di dinamica locale:

$$\begin{cases} x_A(t+1)=k_{A,A}x_A(t)+k_{A,B}x_B(t) \\ x_B(t+1)=k_{B,B}x_B(t)+k_{B,A}x_A(t) \end{cases}$$

diventa sintetizzabile nell'unica equazione matriciale:

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{X}(t)$$

che formalizza la *dinamica locale* dell'insieme di popolazioni interagenti (indichiamo con il simbolo $\times$ il prodotto matriciale "righe per colonne").

> ✔ Data la matrice $\boldsymbol{K}$ indicata sopra, si verifichi che $\boldsymbol{K}\times[10 \;\; 20]^T=[14 \;\; 14]^T$ e si calcoli $\boldsymbol{K}\times[14 \;\; 14]^T$, corrispondente a $\boldsymbol{X}(t=2)$.

Grazie al fatto che i coefficienti della matrice $\boldsymbol{K}$ sono costanti, a questo punto il passaggio dalla dinamica locale alla *dinamica globale* è immediato:

$$\boldsymbol{X}(n)=\boldsymbol{K}^n\times\boldsymbol{X}(0)$$

per cui, per esempio:

$$\boldsymbol{K}^2=\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.42 \\ 0.28 & 0.42 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\boldsymbol{X}(2)=\boldsymbol{K}^2\times\boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.42 \\ 0.28 & 0.42 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15.4 \\ 11.2 \end{bmatrix}$$

La matrice:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{A,A} & k_{A,B} \\ k_{B,A} & k_{B,B} \end{bmatrix}$$

(o una equivalente nel caso di un sistema costituito da tre o più popolazioni) dunque *sintetizza l'informazione sulla struttura del sistema*, necessaria e sufficiente per ricostruire la dinamica del sistema stesso a partire dai valori iniziali $\boldsymbol{X}(0)=[x_A(0) \;\; x_B(0)]^T$.
Un caso particolarmente semplice è quello in cui la matrice $\boldsymbol{K}$ contiene elementi non nulli solo nella diagonale principale, cioè ha la forma:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{A,A} & 0 \\ 0 & k_{B,B} \end{bmatrix}$$

in tal caso le due popolazioni non interagiscono, nel senso che la dinamica di uno non influisce in nessun modo sulla dinamica dell'altro, e il sistema è quindi in effetti costituito da due sottosistemi indipendenti, a ognuno dei quali si applicano le considerazioni fatte per un aggregato singolo.
Nell'ipotesi che invece le popolazioni siano effettivamente interagenti, un dato rilevante si ottiene esaminando la somma degli elementi di ogni colonna della matrice $\boldsymbol{K}$, cioè per ogni colonna j i valori

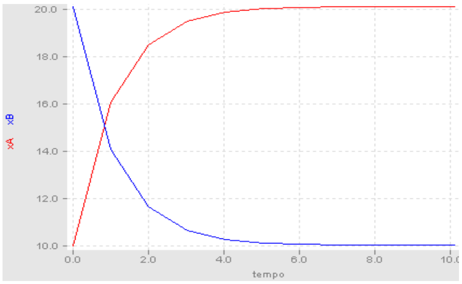
$C_j = \sum_i k_{i,j}$. Il valore C_j fornisce un'informazione sull'andamento nel tempo del SA j -esimo. Infatti:

- se $C_j < 1$, una frazione (pari a $1 - C_j$) della grandezza caratteristica della popolazione j -esima esce dal sistema a ogni unità di tempo;
- se $C_j > 1$, una frazione (pari a $C_j - 1$) della grandezza caratteristica della popolazione j -esima entra nel sistema a ogni unità di tempo;
- se infine $C_j = 1$, la grandezza caratteristica della popolazione j -esima si conserva nel corso del tempo.

Poiché le popolazioni sono interagenti, la dinamica di una popolazione dipende da quella delle altre: in conseguenza, potrebbe per esempio accadere che la prima popolazione abbia un andamento crescente anche se $C_1 < 1$, naturalmente nel caso in cui la seconda popolazione trasferisca alla prima un numero di individui sufficiente. Ne segue, in particolare, che se per ogni colonna j vale che $C_j = 1$, cioè tutte le grandezze caratteristiche x_j si conservano, allora il sistema è stabile, cioè, superato il transitorio, le grandezze x_j sono costanti. Per esempio, per $\boldsymbol{X}(0) = [10 \;\; 20]^T$ e:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

l'andamento nel tempo delle due popolazioni è:

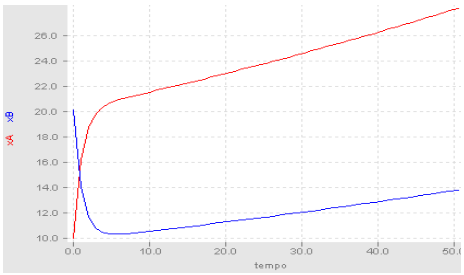


L'evoluzione nel tempo del sistema in esame, nel caso in cui le due grandezze si conservano.

Tale stabilità è criticamente legata alla condizione $\forall j, C_j = 1$; anche una piccola variazione, come:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

produce infatti:



L'evoluzione nel tempo del sistema in esame, nel caso in cui una delle due grandezze non si conserva.

✔ Si studi l'andamento nel tempo del sistema in esame in funzione dei valori R_i così definiti: per ogni riga i , $R_i = \sum_j k_{i,j}$.
Si analizzi in particolare la condizione $\forall i, R_i = 1$.

11. Aggregati complessi /3

Un semplice esempio di interazione *non lineare* tra coppie di popolazioni è stato modellizzato intorno al 1920 nelle equazioni cosiddette di Lotka-Volterra (dal nome dei due matematici che indipendentemente le hanno formulate). Il sistema di Lotka-Volterra in forma differenziale è il seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_A(t)}{dt} = k_{A,A} x_A(t) - k_{A,B} x_A(t) x_B(t) \\ \dfrac{dx_B(t)}{dt} = -k_{B,B} x_B(t) + k_{B,A} x_A(t) x_B(t) \end{cases}$$

con i parametri tutti positivi, che descrive il fatto che la popolazione A cresce spontaneamente (potrebbero

essere degli animali erbivori che vivono in un ambiente ampio a sufficienza per garantire il cibo per tutti) ma decresce a causa delle interazioni con la popolazione *B* (potrebbero essere animali carnivori che si cibano degli individui della popolazione *A*), formalizzate attraverso il prodotto $x_A(t)x_B(t)$, mentre la popolazione *B* decresce spontaneamente ma cresce a causa delle interazioni con la popolazione *A*.
Trasformando le derivate in differenze finite:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$$

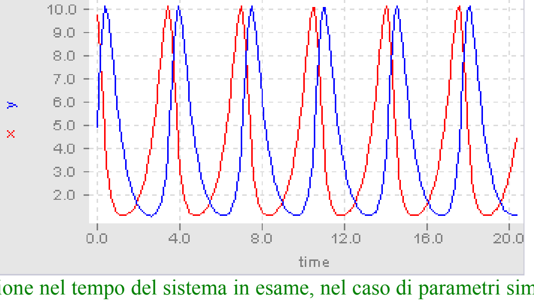
questo sistema diventa:

$$\begin{cases} x_A(t+\Delta t) = x_A(t) + [k_{A,A} x_A(t) - k_{A,B} x_A(t) x_B(t)] \Delta t \\ x_B(t+\Delta t) = x_B(t) + [-k_{B,B} y(t) + k_{B,A} x_A(t) x_B(t)] \Delta t \end{cases}$$

e come tale è facilmente calcolabile in modo iterativo.
A causa della non linearità, la dinamica di questo sistema è complessa. Per esempio, per:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.5 \\ 0.5 & 2.0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{X}(t=0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \Delta t = 0.05$$

si ottiene:

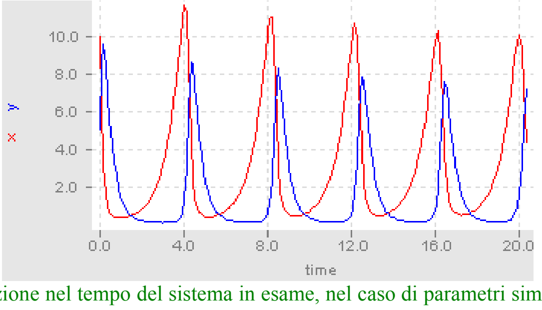


L'evoluzione nel tempo del sistema in esame, nel caso di parametri simmetrici.

mentre con parametri asimmetrici, per esempio:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.0 \\ 1.0 & 3.0 \end{bmatrix}$$

si ottiene:



L'evoluzione nel tempo del sistema in esame, nel caso di parametri simmetrici.

Si può notare infine che anche questo sistema può essere calcolato direttamente in forma matriciale, mediante la matrice di parametri (non costanti):

$$\boldsymbol{K}(t) = \begin{bmatrix} k_{A,A} & -k_{A,B} x_A(t) \\ k_{B,A} x_B(t) & -k_{B,B} \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t) = \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{K}(t) \times \boldsymbol{X}(t) \Delta t$$

Il tema delle interazioni non lineari tra popolazioni è assai generale, e spesso complesso: per ora possiamo fermare qui la nostra analisi.

Qualche ulteriore considerazione generale sul concetto di sistema
Potrebbe fornire qualche motivo di riflessione la seguente successione di tipologie di sistemi: – strutture statiche (atomi, molecole, cristalli, …); – meccanismi tipo orologio (orologi, macchine convenzionali, sistemi solari, …); – meccanismi di controllo (termostati, servomeccanismi, meccanismi omeostatici negli organismi, …); – sistemi aperti (fiamma, cellule, organismi in generale, …);

– organismi inferiori (organismi “simili a piante”, …)
[riproduzione; divisione del lavoro];
– animali
[crescente importanza del trasporto di informazione;
apprendimento; inizio della coscienza];
– uomo
[simbolismo; coscienza di sé; comunicazione mediante linguaggio; …];
– sistemi socio-culturali (popolazioni di organismi);
– sistemi simbolici (linguaggio, logica, matematica, scienze, arti, …).
[rielaborato parzialmente da K.Boulding, General systems theory – The skeleton of science; in: Management systems, P. Schoderbek (ed.), 1967].

Potrebbe inoltre fornire qualche motivo di riflessione il seguente elenco di principi generali a proposito di sistemi:
– quanto più un sistema è specializzato, tanto meno è in grado di adattarsi ai cambiamenti;
– quanto più grande è un sistema, tanto maggiore è la quantità delle risorse che devono essere dedicate per assicurare il suo funzionamento;
– è sempre possibile considerare un sistema come parte di sistemi che lo includono (supersistemi) e come insieme di sistemi inclusi in esso (sottosistemi);
– i sistemi tendono a crescere.
[rielaborato parzialmente da E.Yourdon, Analisi strutturata dei sistemi, trad.it. 1990, p.36].